SS 2024 Prof. Hansjörg Geiges
Dr. Tilman Becker

Lineare Algebra II

Übungsblatt 4

Aufgabe 1. Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $\mu_A \in \mathbb{R}[x]$ das Minimalpolynom von A.

(a) Wir können A auch als komplexe Matrix auffassen, d.h. als Element von $\mathbb{C}^{n\times n}$, und deren Minimalpolynom $\mu_A^{\mathbb{C}} \in \mathbb{C}[x]$ definieren. Gilt $\mu_A^{\mathbb{C}} = \mu_A$?

(b) Zeigen Sie: Falls μ_A über $\mathbb{R}$ in Linearfaktoren zerfällt, dann auch das charakteristische Polynom χ_A.

Aufgabe 2. Auf dem Vektorraum $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ der reellen Polynom vom Grad ≤ 3 betrachten wir das Skalarprodukt

$$\langle p, q\rangle := \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,\mathrm{d}x.$$

Durch

$$p \longmapsto \int_{-1}^{1} p(x)\sin(\pi x)\,\mathrm{d}x$$

ist ein lineares Funktional auf $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ definiert. Nach dem Rieszschen Darstellungssatz gibt es daher ein $q \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ mit der Eigenschaft, daß

$$\int_{-1}^{1} p(x)\sin(\pi x)\,\mathrm{d}x = \langle p, q\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{für alle } p \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}).$$

Bestimmen Sie dieses Polynom q.
Hinweis: Es ist nicht nötig, dazu eine Orthonormalbasis von $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ zu bestimmen. Im Prinzip müßte man die Integrale $I_k = \int x^k \sin(\pi x)$ für $k = 1, 3$ berechnen ($I_0 = I_2 = 0$), aber Sie sollten die Koeffizienten von q einfach mittels I_1, I_3 ausdrücken; dann reduziert sich die Aufgabe im wesentlichen auf das Lösen von linearen Gleichungssystemen.

Aufgabe 3. (a) Verifizieren Sie die Rechenregeln für die adjungierte Abbildung von Seite 229 des Vorlesungsskripts.

(b) Seien $(V, \langle\, .\,,\, .\,\rangle_V)$ und $(W, \langle\, .\,,\, .\,\rangle_W)$ zwei euklidische oder unitäre Vektorräume. Es seien $v_0 \in V$ und $w_0 \in W$ gewählt. Definiere $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$ durch

$$f(v) = \langle v, v_0\rangle_V \cdot w_0.$$

Bestimmen Sie die adjungierte Abbildung $f^* \in \mathrm{Hom}(W, V)$.

b.w.

Aufgabe 4. In dieser Aufgabe wollen wir zeigen, daß der Rieszsche Darstellungssatz im allgemeinen für unendlich-dimensionale Vektorräume *nicht* gilt.

Sei V die Menge der reellen Zahlenfolgen $x = (x_1, x_2, \ldots)$, die ab einem gewissen Index (der von der Folge abhängt) konstant sind, d.h. mit der Eigenschaft, daß ein $k = k(x)$ existiert, so daß $x_\ell = x_k$ für $k \leq \ell$. Mit der komponentenweisen Addition und Skalarmultiplikation ist V ein reeller Vektorraum. Durch

$$\langle x, y \rangle := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k y_k}{k^2}$$

ist auf V ein Skalarprodukt definiert (vergl. Übungsblatt 11 zur Linearen Algebra I).

(a) Für $j \in \mathbb{N}$ sei $e_j \in V$ die Folge mit $x_j = 1$ und $x_k = 0$ für $k \neq j$. Weiter sei $e_\infty \in V$ die konstante Folge $(1, 1, \ldots)$. Zeigen Sie, daß $e_1, e_2, \ldots, e_\infty$ eine Basis von V ist, d.h. jedes Element von V läßt sich eindeutig als endliche Linearkombination dieser Vektoren schreiben.

(b) Durch $\alpha(e_j) := 0$ für $j \in \mathbb{N}$ und $\alpha(e_\infty) := 1$ (und lineare Erweiterung) ist eine Linearform $\alpha\colon V \to \mathbb{R}$ definiert. Zeigen Sie, daß es kein Element $v_\alpha \in V$ gibt, so daß $\alpha(v) = \langle v, v_\alpha \rangle$ für alle $v \in V$ gilt.

Bonusaufgabe. Lesen Sie zunächst den Beweis der Cauchy–Schwarzschen Ungleichung für reelle Skalarprodukte (Satz 7.1) und überzeugen Sie sich, daß dieser Beweis wörtlich auch für unitäre Skalarprodukte gilt.

(a) Passen Sie die Beweise aus Kapitel 7 an, um die folgenden Aussagen für unitäre Vektorräume zu beweisen:

  (i) Dreiecksungleichung für die durch das unitäre Skalarprodukt definierte Norm,

  (ii) Satz des Pythagoras: Aus $v \perp w$ folgt $|v + w|^2 = |v|^2 + |w|^2$. Gilt auch die Umkehrung?

(b) Sei $(e_1, \ldots, e_m)$ ein orthonormales m-Tupel von Vektoren in einem euklidischen oder unitären Vektorraum $(V, \langle\, . \,, \,.\, \rangle)$. Zeigen Sie, daß für jeden Vektor $v \in V$ gilt:

$$|\langle v, e_1 \rangle|^2 + \cdots + |\langle v, e_m \rangle|^2 \leq |v|^2.$$

Bonusaufgabe. Es seien V, W endlich-dimensionale euklidische Vektorräume. Wir schreiben das Skalarprodukt in beiden Vektorräumen als $\langle\, . \,, \,.\, \rangle$. Sei $f \in \operatorname{Hom}(V, W)$. Wir schreiben $f^{\text{dual}}\colon W^* \to V^*$ für die zu f duale Abbildung, und $f^{\text{adj}}\colon W \to V$ für die zu f adjungierte Abbildung. Durch

$$\begin{array}{rccc} \Phi_V\colon & V & \longrightarrow & V^* \\ & v & \longmapsto & \alpha_v \end{array}$$

mit $\alpha_v(x) = \langle x, v \rangle$ für $x \in V$ ist ein Isomorphismus definiert. Analog sei $\Phi_W\colon W \to W^*$, $w \mapsto \beta_w$, definiert. Zeigen Sie, daß

$$f^{\text{dual}} \circ \Phi_W = \Phi_V \circ f^{\text{adj}}.$$

Mit anderen Worten: Unter der kanonischen Identifikation von V mit V^* bzw. W mit W^* mittels des Skalarproduktes gilt $f^{\text{adj}} = f^{\text{dual}}$, so daß die Verwendung der Notation f^* für beide Abbildungen unproblematisch ist.

Abgabe: Mittwoch 8.5.24
bis spätestens 16 Uhr in den Briefkästen
im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock).