WS 2007/2008

Prof. Hansjörg Geiges
Dipl.-Math. Bijan Sahamie

Mathematik für Physiker I

Übungsblatt 2

Aufgabe 1. Es seien A, B Teilmengen von $\mathbb{R}$ und $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$, $g\colon B \longrightarrow \mathbb{R}$ Funktionen. Schreibe $C := g(B)$.

(a) Falls f und g injektiv sind und $f(A) = B$ gilt, wie erhält man dann $(g \circ f)^{-1}\colon C \longrightarrow A$ aus $g^{-1}\colon C \longrightarrow B$ und $f^{-1}\colon B \longrightarrow A$.

(b) Es gelte $f(A) \subset B$ und $g(B) \subset A$. Außerdem sei $g \circ f$ die identische Funktion auf A und $f \circ g$ die identische Funktion auf B. Zeigen Sie, daß die Abbildung $f\colon A \longrightarrow B$ bijektiv ist.

Aufgabe 2. Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, daß für $n, k \in \mathbb{N}_0$ und $0 \leq k \leq n$ gilt: Die Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge (d.h. einer Menge mit n Elementen) ist gleich $\binom{n}{k}$. Können Sie auch einen direkten Beweis geben, der ohne vollständige Induktion auskommt?

Aufgabe 3. Zeigen Sie für $n \in \mathbb{N}$:

(a) $$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$ (b) $$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

Aufgabe 4. Wir wollen beweisen, daß alle natürlichen Zahlen gleich sind, z.B. $3 = 7$. Definiere dazu für $a, b \in \mathbb{N}$ das Maximum $\max(a, b)$ als die größere der beiden Zahlen a, b. Für $a = b$ ist $\max(a, b) := a = b$. Sei $\mathcal{A}_n$ die Aussage: „Falls $a, b \in \mathbb{N}$ mit $\max(a, b) = n$, dann $a = b$.“

(i) **Induktionsanfang:** $\mathcal{A}_1$ ist gültig, denn aus $\max(a, b) = 1$ folgt $a = b = 1$.

(ii) **Induktionsschluß:** Angenommen, $\mathcal{A}_n$ ist gültig für ein bestimmtes $n \in \mathbb{N}$. Seien $a, b \in \mathbb{N}$ mit $\max(a, b) = n + 1$. Setze $\alpha = a - 1$, $\beta = b - 1$. Dann gilt $\max(\alpha, \beta) = n$, also $\alpha = \beta$, da $\mathcal{A}_n$ gilt. Damit folgt $a = b$, demnach gilt $\mathcal{A}_{n+1}$.

Seien nun $a, b \in \mathbb{N}$ beliebig, $r := \max(a, b)$. Da $\mathcal{A}_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, so gilt insbesondere $\mathcal{A}_r$, also $a = b$. Wo liegt der Trugschluß?

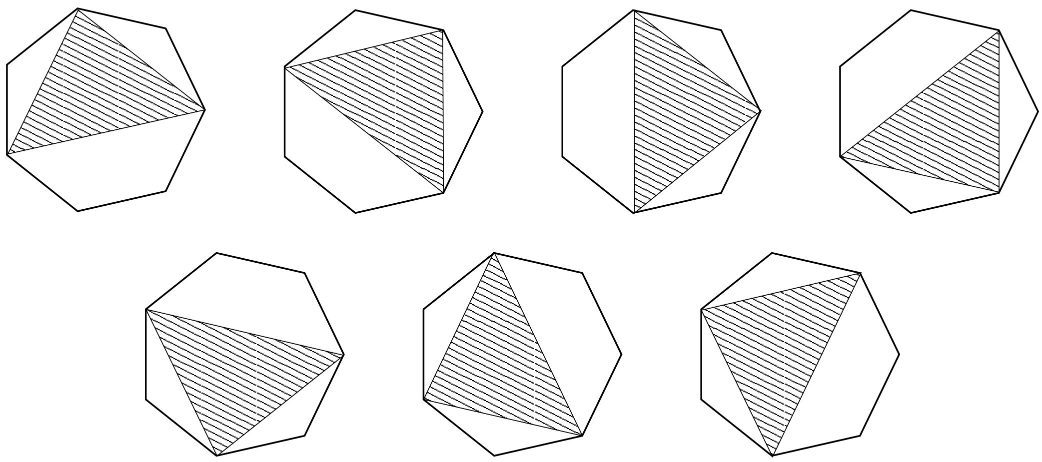
b.w.

Bemerkung. Nachfolgend aufgelistet sind zwei Bonusaufgaben. Die Bearbeitung ist freiwillig. Wenn Sie die Aufgaben erfolgreich bearbeiten, gibt es hierfür auch Punkte.

Bonusaufgabe. Zeigen Sie den Binomischen Lehrsatz, d.h. für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

Knobelaufgabe. Gegeben sei ein reguläres Polygon mit n Seiten. Wie viele Dreiecke gibt es, deren Ecken auch Ecken des Polygons sind, aber deren Seiten keine Seiten des Polygons sind? Für $n = 7$ gibt es zum Beispiel sieben solche Dreiecke.



Abgabe: Montag 29.10.07 in der Vorlesung.