WS 2007/2008

Prof. Hansjörg Geiges
Dipl.-Math. Bijan Sahamie

Mathematik für Physiker I

Übungsblatt 6

Aufgabe 1. Seien $D \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ (aber nicht notwendigerweise $x_0 \in D$) und $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Man schreibt

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = c,$$

falls gilt:

(i) Es existiert eine Folge (x_n) in $D \backslash \{x_0\}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Dazu sagt man auch: x_0 ist ein **Häufungspunkt** von D.

(ii) Für jede solche Folge (x_n) gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = c$.

Man kann auch $x_0 = \pm\infty$ und $c = \pm\infty$ zulassen. So bedeutet zum Beispiel

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

folgendes:

(i) Es existiert eine Folge (x_n) in D mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, d.h.

$$\forall\, R \in \mathbb{R}\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}:\ x_n > R \ \text{ für alle } n \geq n_0.$$

(ii) Für jede solche Folge (x_n) gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \infty$.

Berechnen Sie folgende Grenzwerte:

(i) $\lim\limits_{x\to 2} \left(\frac{1}{2-x} - \frac{12}{8-x^3}\right)$

(ii) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x}\cdot(\sqrt{x+3}-\sqrt{x})\right)$
(**Hinweis:** Dritte binomische Formel $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.)

(iii) $\lim\limits_{x\to 1} (x^r - 1)/(x-1)$ für $r \in \mathbb{Q}$
(**Hinweis:** Berechnen Sie den Grenzwert zunächst für $r \in \mathbb{N}$.)

Aufgabe 2. Die Sägezahnfunktion $s\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist definiert durch $s(x) = |[x+1/2] - x|$. Zeichnen Sie den Graphen von s und zeigen Sie:

(i) Für $|x| \leq 1/2$ gilt $s(x) = |x|$.

(ii) $s(x+n) = s(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$.

(iii) Die Funktion $s(x)$ ist stetig.

b.w.

Aufgabe 3. Die Funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ sei stetig und es gelte $f(0) = f(1)$. Zeigen Sie: Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein $x \in [0,1]$ mit $f(x) = f(x + 1/n)$. Was bedeutet diese Aussage geometrisch? (**Hinweis:** Wende den Zwischenwertsatz in geeigneter Weise auf $g(x) := f(x) - f(x + 1/n)$, $x \in [0, 1/n]$ an.)

Aufgabe 4.

(a) Der Durchschnitt zweier kompakter Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ ist kompakt. Zeigen Sie dies auf zwei Weisen:

   (i) direkt aus der Definition von Kompaktheit;

   (ii) mittels des Satzes von Bolzano-Weierstraß.

(b) Der Durchschnitt unendlich vieler kompakter Mengen ist kompakt.

(c) Die Vereinigung zweier kompakter Mengen ist kompakt

(d) Ist die Vereinigung unendlich vieler kompakter Mengen stets kompakt?

(e) Geben Sie ein Beispiel von nicht-leeren abgeschlossenen Mengen $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots$ mit der Eigenschaft, daß

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset.$$

(f) Für nicht-leere kompakte Mengen $K_1 \supset K_2 \supset K_3 \supset \dots$ gilt stets

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} K_i \neq \emptyset.$$

Bonusaufgabe. Jede reelle polynomiale Funktion

$$\begin{array}{rccc} f\colon & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \end{array}$$

mit $a_n \neq 0$ und n ungerade besitzt eine Nullstelle. Zeigen Sie dies, indem Sie zunächst nachweisen, daß $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ oder $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \mp\infty$ gilt.

Knobelaufgabe. Geben Sie explizit eine Menge $M \subset \mathbb{R}^2$ an, so daß die folgenden Mengen alle verschieden sind:

$$M, \quad \mathring{M}, \quad \overline{M}, \quad \mathring{\overline{M}}, \quad \overline{\mathring{M}}, \quad \overline{\mathring{\overline{M}}}, \quad \mathring{\overline{\mathring{M}}}$$

Abgabe: Montag 26.11.07 in der Vorlesung.