WS 2007/2008

Prof. Hansjörg Geiges
Dipl.-Math. Bijan Sahamie

Mathematik für Physiker I

Übungsblatt 11

Aufgabe 1.

(a) Zeigen Sie, daß

$$
\begin{aligned}
U_1 &:= \{f \in C^2([a,b]) \,:\, f(a) = f(b), f''(x) = 25 f(x)\} \\
&\quad \text{und} \\
U_2 &:= \{f \in C^2([a,b]) \,:\, x f''(x) + \sin(x^2) f'(x) + e^x f(x) = 0\}
\end{aligned}
$$

Unterräume des Vektorraumes $C^2([a,b])$ sind.

(b) Sei V der Vektorraum aller Funktionen $[-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$. Man untersuche, ob die folgenden Teilmengen Unterräume von V sind:

$$
\begin{aligned}
U_1 &:= \{f \in V \,:\, f(0) = 0\} \\
U_2 &:= \{f \in V \,:\, f(x) = 0 \text{ für } -1 \leq x < 1/2\} \\
U_3 &:= \{f \in V \,:\, f \text{ ist stetig in } x = 1/2\} \\
U_4 &:= \{f \in V \,:\, f(-x) = f(x) \text{ für alle } x \in [-1,1]\} \\
U_5 &:= \{f \in V \,:\, f \text{ ist streng monoton wachsend}\}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2. Bestimmen Sie die Matrizen A_ϕ, B_ϕ, C_ϕ der linearen Abbildungen des $\mathbb{R}^3$ in sich, die jeweils eine Drehung um die x-, y- bzw. z-Achse um den Winkel ϕ in entgegengesetztem Uhrzeigersinn beschreiben (Rechte-Hand-Regel für die Reihenfolge x, y, z bzw. y, z, x bzw. z, x, y der Achsen). Zeigen Sie $A_\alpha A_\beta = A_\beta A_\alpha = A_{\alpha+\beta}$ durch direktes Nachrechnen. Berechnen Sie die Matrizen $A_{\pi/2} B_{\pi/2}$, $B_{\pi/2} A_{\pi/2}$ und $C_{\pi/2} B_{\pi/2} A_{\pi/2}$.

Aufgabe 3. Ein Neutron mit der Masse m und der Geschwindigkeit v_0 treffe auf einen ruhenden Atomkern, der das Neutron einfängt und anschließend in zwei Kerne der Masse M_1, M_2 mit den Geschwindigkeiten w_1, w_2 zerfällt. Welche Bedingung müssen die gemessenen Geschindigkeiten w_i erfüllen, damit man mit Hilfe des Impulssatzes die unbekannten Massen M_i daraus bestimmen kann, wann gibt es eine Lösung, und wann ist die Lösung eindeutig bestimmt?

Aufgabe 4. Der Vektor $a \in \mathbb{R}^3$ ergänze die ersten beiden Einheitsvektoren zu einer Basis (e_1, e_2, a). Es sei $P\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ die Projektion des $\mathbb{R}^3$ auf $U := \mathbb{R}^2 \times 0$ längs der Richtung von a (d.h. $P(x) \in U$ ist das „Schattenbild" von x bei einer Beleuchtung in Richtung von a). Berechnen Sie P als Matrix, zeigen Sie, daß $P \circ P = P$ ist, berechnen Sie die Matrix der komplementären Projektion $Q := \mathrm{id} - P$, und zeigen Sie auch $Q \circ Q = Q$.

b.w.

Bonusaufgabe. Die *Lorentz-Transformation* beschreibt den Koordinatenwechsel zwischen zwei Inertialsystemen mit konstanter Relativgeschwindigkeit. Im Fall einer Bewegung in x_1-Richtung mit Geschwindigkeit v ist diese Transformation beschrieben durch

$$\begin{aligned} x_0' &= (x_0 - \beta x_1)\gamma, \\ x_1' &= (x_1 - \beta x_0)\gamma, \\ x_2' &= x_2, \\ x_3' &= x_3. \end{aligned}$$

Dabei ist $x_0 = ct$ die Zeitkoordinate mit c = Lichtgeschwindigkeit, $\beta = v/c \in (-1, 1)$, sowie $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$.

(a) Bestimmen Sie die 4×4 Matrix $\Lambda(v)$, die diese lineare Abbildung beschreibt.

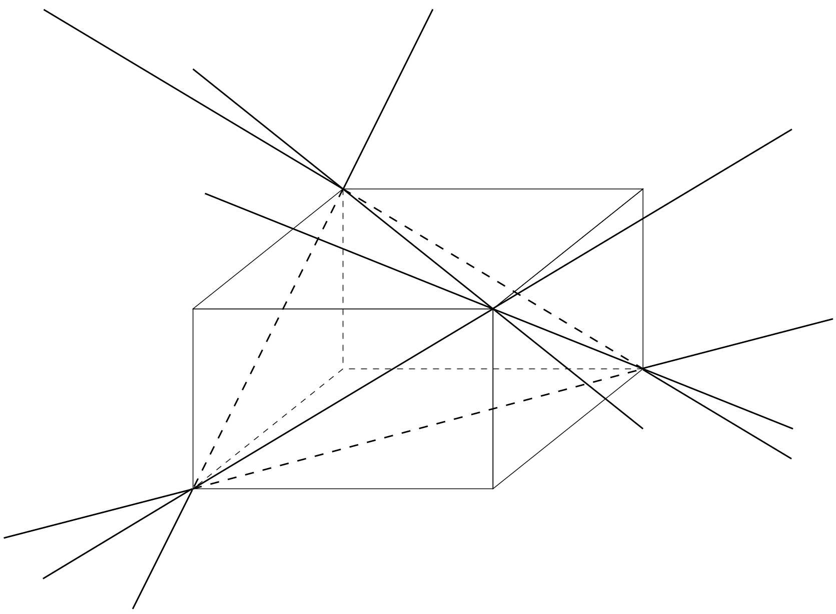
(b) Zeigen Sie, daß die Hintereinanderausführung $\Lambda(v_2)\Lambda(v_1)$ zweier Lorentz-Transformationen wieder eine Lorentz-Transformation $\Lambda(v_3)$ ist. Berechnen Sie v_3.

(c) Zeigen Sie, daß es ein eindeutig bestimmtes $\varphi \in \mathbb{R}$ mit $\cosh\varphi = \gamma$ und $\sinh\varphi = \beta\gamma$ gibt. Stellen Sie $\Lambda(v)$ mittels dieser Hyperbelfunktionen dar und begründen Sie, warum man φ als *imaginären Drehwinkel* bezeichnet.

Knobelaufgabe. Ist E eine Teilmenge des $\mathbb{R}^3$, so definiert man $L(E)$ als die Menge aller Punkte, die auf einer Geraden durch zwei Punkte von E liegen. Ist zum Beispiel

$$E_0 := \{(0,0,0),\ (1,1,0),\ (1,0,1),\ (0,1,1)\},$$

so besteht $L(E_0)$ aus den sechs Kanten eines regulären Tetraeders, unendlich verlängert in beide Richtungen.



Gilt $L(L(E_0)) = \mathbb{R}^3$?

Abgabe: Montag 14.01.08 in der Vorlesung.