Prof. Hansjörg Geiges
Dipl.-Math. Bijan Sahamie

Mathematik für Physiker I

Übungsblatt 12

Aufgabe 1.

(a) Bestimmen Sie den Durchschnitt $U \cap V$ und die Summe $U + V$ der beiden Unterräume $U = \mathrm{Lin}(u_1, u_2)$ und $V = \mathrm{Lin}(v_1, v_2)$ des $\mathbb{R}^3$, wobei

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Zeigen Sie, daß $(u_1' := 2u_1 + 3u_2, u_2' := u_1 + 2u_2)$ und $(v_1' := 2v_1 + v_2, v_2' := 3v_1 + v_2)$ Basen von U bzw. V sind.

(c) Sei $f\colon U \to V$ die lineare Abbildung, die durch $f(u_1) = v_1 + v_2$ und $f(u_2) = v_1 - v_2$ bestimmt ist. Geben Sie die Matrix dieser linearen Abbildung bezüglich der Basen (u_1', u_2') bzw. (v_1', v_2') an.

Aufgabe 2. Sei A eine reelle $m \times n$ Matrix.

(a) Addieren Sie, für vorgegebene $i \neq j \in \{1, \ldots, n\}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, zur i-ten Spalte das λ-fache der j-ten. Zeigen Sie, daß die so abgeänderte Matrix, aufgefaßt als Abbildung $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, das gleiche Bild wie A hat.

(b) Addieren Sie, für vorgegebene $i \neq j \in \{1, \ldots, m\}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, zur i-ten Zeile das λ-fache der j-ten. Zeigen Sie, daß die so abgeänderte Matrix, aufgefaßt als Abbildung $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, den gleichen Kern wie A hat.

Aufgabe 3.

(a) Geben Sie für folgende lineare Abbildungen $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ jeweils eine Basis von $\mathrm{Kern}(f)$ und $\mathrm{Bild}(f)$ an, bestimmen Sie $f \circ f$ und, falls die Umkehrabbildung existiert, f^{-1}.

$$\text{(i)} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 \\ -4x_1 - 2x_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{(ii)} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 3x_1 - 2x_2 \\ 4x_1 - 3x_2 \end{pmatrix}$$

(b) Geben Sie jeweils die reelle 2×2 Matrix an, die die folgende lineare Abbildung $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ beschreibt.

(i) Spiegelung am Ursprung $(0, 0)$

(ii) Spiegelung an der x_1-Achse

(iii) Spiegelung an der Winkelhalbierenden $\{x_1 = x_2\}$.

b.w.

Aufgabe 4. Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Auf dem Vektorraum $V := C^0([a, b])$ betrachte man die Abbildung

$$\begin{array}{rccc} \Phi\colon & V & \longrightarrow & V \\ & f & \longmapsto & F \end{array} \qquad \text{mit } F(x) := \int_a^x f(t)dt,\ x \in [a, b].$$

Man zeige: Φ ist linear, injektiv, aber nicht surjektiv. Daraus folgere man, daß V unendlich-dimensional ist.

Bonusaufgabe.

(a) Es seien $f_1, f_2\colon V \longrightarrow W$ lineare Abbildungen endlich-dimensionaler Vektorräume mit $\mathrm{Kern}(f_1) = \mathrm{Kern}(f_2)$. Dann gibt es einen Isomorphismus $h\colon W \longrightarrow W$ mit $f_2 = h \circ f_1$.

(b) Es seien $f_1, f_2\colon V \longrightarrow W$ lineare Abbildungen endlich-dimensionaler Vektorräume mit $\mathrm{Bild}(f_1) = \mathrm{Bild}(f_2)$. Dann gibt es einen Isomorphismus $g\colon V \longrightarrow V$ mit $f_2 = f_1 \circ g$.

Knobelaufgabe. $\mathbb{R}$ ist ein unendlich-dimensionaler $\mathbb{Q}$-Vektorraum.
(**Hinweis:** Betrachte Ausdrücke der Form $\lambda_1 \log p_1 + \cdots + \lambda_n \log p_n$ mit $\lambda_i \in \mathbb{Z}$ und $p_i \in \mathbb{N}$ Primzahl.)

Abgabe: Montag 21.01.08 in der Vorlesung.