Prof. Hansjörg Geiges
Dipl.-Math. Bijan Sahamie

Mathematik für Physiker I

Übungsblatt 13

Aufgabe 1. Geben Sie alle Lösungen der folgenden Gleichungssysteme an.

(i)
$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 3y & - & 2z & = & 4 \\ 2x & + & y & - & z & = & -1 \\ & & y & - & z & = & 1 \end{array}$$

(ii)
$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & z & = & 0 \\ -x & - & 3y & - & 3z & = & -1 \\ 2x & + & 5y & + & 4z & = & 1 \\ 3x & + & 7y & + & 5z & = & 1 \end{array}$$

(iii)
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & y & + & 3z & + & 8w & = & 7 \\ 2x & - & 3y & + & z & - & w & = & 12 \\ -x & - & 2y & - & 3z & - & 6w & = & -10 \\ 3x & - & 5y & + & 3z & + & 2w & = & 21 \end{array}$$

Aufgabe 2. Es sei A die 4×4 Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie Basen von Kern(A) und Bild(A), mit A aufgefaßt als lineare Abbildung $A\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$.

(b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Gleichungssystems

$$Ax = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.

(a) Es sei V ein K-Vektorraum mit Basis $(b_1, \ldots, b_n)$ und $f\colon V \longrightarrow V$ der Endomorphismus definiert durch

$$f(b_1) = b_2,\ f(b_2) = b_3, \ldots,\ f(b_n) = b_1.$$

Man bestimme die Matrix von f bezüglich $(b_1, \ldots, b_n)$.

b.w.

(b) Es sei V der Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 3 und $f\colon V \longrightarrow V$ die lineare Abbildung

$$p(x) \longmapsto p'(x).$$

Man zeige, daß $(1, x+1, x^2 - x, x^3 + 2x)$ eine Basis von V ist, und bestimme die Matrix von f bezüglich dieser Basis.

Aufgabe 4. Der Vektorraum $V = K^{2\times 2}$ der 2×2 Matrizen über dem Körper K hat die Standardbasis

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Sei $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in K^{2\times 2}$ fest. Betrachte die linearen Abbildungen $f_1, f_2, f_3\colon V \longrightarrow V$ gegeben durch $f_1(X) = AX$, $f_2(x) = XA$, $f_3(X) = AX - XA$. Man bestimme die Matrizen von f_1, f_2, f_3 bezüglich der Standardbasis.

Bonusaufgabe. Es sei V ein K-Vektorraum.

(a) Die Menge V^* der linearen Abbildungen $f\colon V \longrightarrow K$ mit Addition

$$(f+g)(v) := f(v) + g(v)$$

und Skalarmultiplikation

$$(\lambda f)(v) := \lambda f(v)$$

ist ein K-Vektorraum. Man nennt V^* den **Dualraum zu** V.

(b) Sei $f\colon V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung zwischen K-Vektorräumen. Zeigen Sie, daß die Abbildung

$$\begin{array}{rccc} f^*\colon & W^* & \longrightarrow & V^* \\ & \varphi & \longmapsto & \varphi \circ f \end{array}$$

linear ist. Sei $g\colon U \longrightarrow V$ eine weitere lineare Abbildung. Man drücke $(f \circ g)^*$ mittels f^* und g^* aus.

(c) Sei $(b_1, \ldots, b_n)$ eine Basis von V. Man zeige, daß durch $b_i^*(b_j) = \delta_{ij}$ (Kronecker-Symbol) eine Basis von V^* definiert wird, die sogenannte **duale Basis**.

Knobelaufgabe. Eine Ebene teilt den $\mathbb{R}^3$ in zwei Teile. Zwei sich schneidende Ebenen teilen den $\mathbb{R}^3$ in vier Teile. Drei Ebenen durch einen gemeinsamen Punkt, die nicht alle eine Gerade gemeinsam haben, teilen den $\mathbb{R}^3$ in acht Teile. In wie viele Teile wird der $\mathbb{R}^3$ von n Ebenen, $n \in \mathbb{N}$, zerlegt, wenn alle Ebenen einen Punkt gemeinsam haben, aber keine drei dieser Ebenen eine gemeinsame Gerade enthalten?

Abgabe: Montag 28.01.08 in der Vorlesung.