

# Elementare Differentialgeometrie

## Übungsblatt 10

**Aufgabe 1.** Sei  $R$  ein Polygon in einem Flächenstück  $\mathbf{x}: U \rightarrow M \subset \mathbb{R}^3$ . Ziel dieser Aufgabe ist es, zu zeigen, daß das Integral  $\iint_{\mathbf{x}^{-1}(R)} K dA$  den Winkel mißt, um den sich ein entlang der Randkurve  $\gamma$  von  $R$  parallel verschobenes Vektorfeld  $\mathbf{X}$  dreht. Wir nehmen dazu an, daß der metrische Tensor die Form  $(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & h^2 \end{pmatrix}$  mit  $h > 0$  hat (geodätische Parallelkoordinaten). Schreibe  $\gamma(s) = \mathbf{x}(\gamma^1(s), \gamma^2(s))$  mit Bogenlängenparameter  $s$  und

$$\mathbf{X}(s) = \cos \varphi(s) \mathbf{x}_1(\gamma^1(s), \gamma^2(s)) + \frac{\sin \varphi(s)}{h} \mathbf{x}_2(\gamma^1(s), \gamma^2(s)).$$

Zeigen Sie nun, daß

$$\varphi'(s) = -h_1(\gamma^1(s), \gamma^2(s)) \cdot (\gamma^2)'(s).$$

Folgern Sie daraus, daß sich  $\mathbf{X}$  bei einem Umlauf von  $\gamma$  um den Winkel  $\Delta\varphi = \int_{\gamma} \varphi' ds = \iint_{\mathbf{x}^{-1}(R)} K dA$  dreht.

### Aufgabe 2.

(a) Zeigen Sie, daß  $(0,0)$  eine Nullstelle der folgenden Vektorfelder ist und berechnen Sie deren Index in der Ebene in  $(0,0)$ :

(i)  $\mathbf{X}(u, v) = (u, v)$ ,

(ii)  $\mathbf{X}(u, v) = (-u, v)$ ,

(iii)  $\mathbf{X}(u, v) = (u, -v)$ ,

(iv)  $\mathbf{X}(u, v) = (u^2 - v^2, -2uv)$ ,

(v)  $\mathbf{X}(u, v) = (u^3 - 3uv^2, v^3 - 3u^2v)$ .

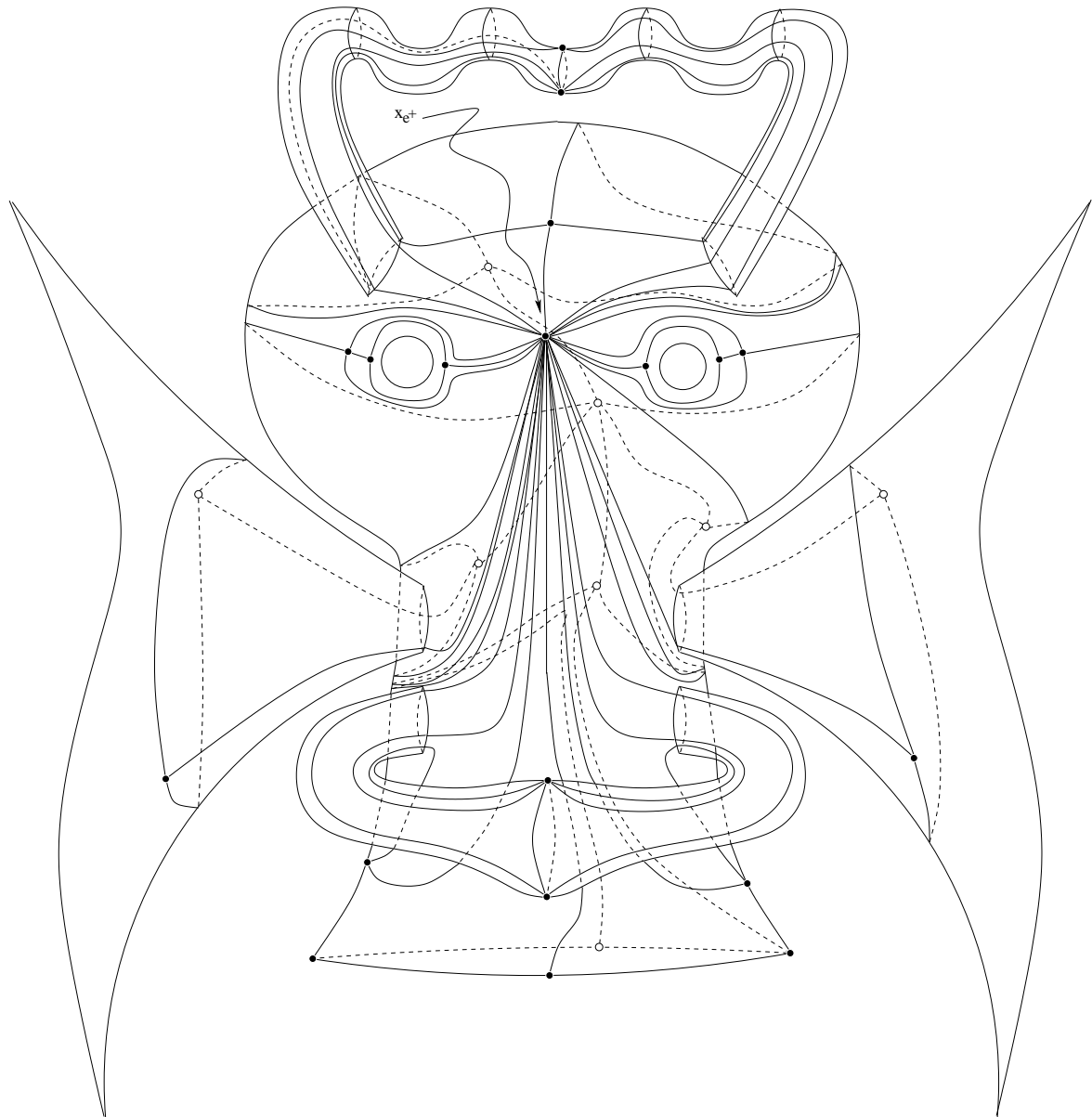
(b) Kann es vorkommen, daß der Index einer Nullstelle Null ist? Falls ja, geben Sie ein Beispiel an.

**Aufgabe 3.** Was kann man über die Existenz von Vektorfeldern ohne Nullstellen auf nichtkompakten Flächen aussagen?

b.w.

**Aufgabe 4.** (Fürs Warten aufs Christkind).

Bestimmen Sie den Gesamtindex des im Bild gezeigten Vektorfeldes auf dem Weihnachtsengel. Der Punkt  $x_e^+$  markiert eine Quelle des Vektorfeldes; das Bild zeigt einige ausgesuchte Flußlinien. Alle anderen Nullstellen des Vektorfeldes sind Senken oder hyperbolische Punkte.



Frohe Weihnachten!

Abgabe: Montag 12.01.2009

Bis spätestens 13:45 Uhr in den Briefkasten im Keller des MI

Bitte beachten Sie: Die Übungen in der Woche vom 07.01.09 finden statt.