WS 2009/2010

Prof. Hansjörg Geiges
Dr. Kai Zehmisch

Topologie

Übungsblatt 2

Aufgabe 1. (a) Die Menge der reellen $(n \times n)$-Matrizen $\mathcal{M}(n \times n, \mathbb{R})$ kann in kanonischer Weise mit $\mathbb{R}^{n^2}$ identifiziert werden. Dies induziert eine Topologie auf der Gruppe der invertierbaren $(n \times n)$-Matrizen $\mathrm{GL}(n) \subset \mathcal{M}(n \times n, \mathbb{R})$. Zeigen Sie, daß $\mathrm{GL}(n)$ mit dieser Topologie eine topologische Gruppe ist.

(b) Zeigen Sie, daß die Gruppe der orthogonalen $(n \times n)$-Matrizen $\mathrm{O}(n)$ mit der durch die Inklusion $\mathrm{O}(n) \subset \mathrm{GL}(n)$ induzierten Topologie eine kompakte topologische Gruppe ist. Dazu genügt es zu zeigen, daß $\mathrm{O}(n)$ unter der in (a) beschriebenen Identifikation eine beschränkte und abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}^{n^2}$ ist.

Aufgabe 2. Ein *Isomorphismus* von topologischen Gruppen G_1 und G_2 ist ein Homöomorphismus $G_1 \to G_2$, der gleichzeitig ein Gruppenisomorphismus ist.

Mit $\mathrm{SO}(n)$ sei die *spezielle orthogonale Gruppe* bezeichnet, d.h. die Gruppe der orthogonalen $(n \times n)$-Matrizen mit Determinante 1.

Zeigen Sie:

(a) Die multiplikative Gruppe $S^1 \subset \mathbb{C}$ ist isomorph zu $\mathrm{SO}(2)$.

(b) $\mathrm{O}(n)$ ist homöomorph zu $\mathrm{SO}(n) \times \mathbb{Z}_2$. Sind diese beiden topologischen Gruppen isomorph?

Aufgabe 3. Die *Quaternionen* sind definiert als 4-dimensionaler reeller Vektorraum

$$\mathbb{H} := \{a = a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k} : a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\},$$

auf dem eine Multiplikation durch die Regel

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = -1$$

und Distributivität erklärt ist. Die Topologie auf $\mathbb{H}$ ist durch die Identifikation mit $\mathbb{R}^4$ gegeben. Die euklidische Norm ist $|a| = \sqrt{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$, und das zu $a \in \mathbb{H}$ *konjugierte* Element sei

$$\bar{a} = a_0 - a_1\mathbf{i} - a_2\mathbf{j} - a_3\mathbf{k}\,.$$

b.w.

Zeigen Sie:

(a) $\mathbf{ij} = \mathbf{k}$ und $\mathbf{ji} = -\mathbf{k}$.

(b) $\overline{ab} = \bar{b}\bar{a}$.

(c) Für $a \neq 0$ ist $\bar{a}/|a|^2$ das inverse Element zu a bezüglich der Multiplikation in $\mathbb{H}$.

(d) $|ab| = |a||b|$.

(e) Die Einheitssphäre $S^3 \subset \mathbb{H}$ mit der von $\mathbb{H}$ induzierten Topologie und Multiplikation ist eine topologische Gruppe.

Aufgabe 4. (a) Beschreiben Sie eine Operation von $\mathbb{Z}$ auf $\mathbb{R} \times [0,1]$, die das Möbiusband als Orbitraum hat.

(b) Beschreiben Sie eine Operation von $\mathbb{Z}_2$ auf dem Torus, die den Zylinder als Orbitraum hat.

(c) Wenn $K \subset \mathbb{R}^3$ den Kreis in der xz-Ebene um den Punkt $(0,0,1)$ vom Radius $1/2$ bezeichne, dann ist eine Einbettung des 2-Torus in den $\mathbb{R}^3$ durch Rotation von K um die x-Achse gegeben. Begründen Sie anschaulich, daß die Operation von $\mathbb{Z}_2$ auf dem Torus, die durch Rotation um $180°$ um die z-Achse definiert ist, einen Orbitraum hat, der homöomorph zur 2-Sphäre ist.

Abgabe: Montag 26.10.09

Bis spätestens 13:45 Uhr in den Briefkasten im Keller des MI