WS 2009/2010

Prof. Hansjörg Geiges
Dr. Kai Zehmisch

# Topologie

Übungsblatt 3

**Aufgabe 1.** Der $n$-dimensionale reell projektive Raum $\mathbb{R}P^n$ ist der Quotientenraum von $S^n$, der durch die Identifikation von Antipodenpunkten entsteht, d.h. $\mathbb{R}P^n := S^n/\sim$ mit $x \sim y$ für $x, y \in S^n$ genau dann, wenn $y = x$ oder $y = -x$.

(a) Zeigen Sie, daß die folgenden Definitionen äquivalent zu dieser Definition von $\mathbb{R}P^n$ sind, d.h., daß sie zu Räumen führen, die homöomorph zu $\mathbb{R}P^n$ sind:

(i) Beginne mit $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ und identifiziere Punkte, die auf derselben Geraden durch den Ursprung liegen, d.h. bilde den Quotientenraum $\big(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}\big)/\sim$ mit $x \sim y$ für $x, y \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ genau dann, wenn ein $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ existiert, so daß $x = \lambda y$. (Man sagt dann auch: $\mathbb{R}P^n$ ist der Raum der Ursprungsgeraden im $\mathbb{R}^{n+1}$.)

(ii) Beginne mit der $n$-dimensionalen Kreisscheibe $D^n$ und identifiziere Antipodenpunkte auf dem Rand $\partial D^n = S^{n-1}$, d.h. $D^n/\sim$ mit $x \sim y$ für $x, y \in D^n$ genau dann, wenn $y = x$ oder $y \in S^{n-1}$ mit $y = -x$.

(b) Sei $M$ ein Möbiusband. Sein Rand ist $\partial M = S^1$. Verklebe $M$ mit einer Kreisscheibe $D^2$ entlang des Randes, d.h. bilde $D^2 \cup_\varphi M$ mit $\varphi = \mathrm{id}_{S^1}$. Zeigen Sie, daß dieser Raum homöomorph zu $\mathbb{R}P^2$ ist. (*Hinweis*: Fassen Sie $\mathbb{R}P^2$ als $S^2/(x \sim -x)$ auf und finden Sie Teilmengen von $S^2$, die explizit eine Beschreibung von $\mathbb{R}P^2$ als $D^2 \cup_\varphi M$ liefern.)

**Aufgabe 2.** Identifizieren Sie $\mathbb{R}^3$ mit dem Raum der rein imaginären Quaternionen, d.h. mit Quaternionen der Form $a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ mit $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$, und $S^3$ mit dem Raum der Quaternionen der Länge 1. Zeigen Sie:

(a) Konjugation von $\mathbb{R}^3 \subset \mathbb{H}$ mit einem Element aus $S^3 \subset \mathbb{H}$ definiert ein Element aus SO(3), d.h. die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ a & \longmapsto & uau^{-1} \end{array}$$

ist für jedes $u \in S^3$ eine spezielle orthogonale Abbildung (also eine Drehung von $\mathbb{R}^3$ um eine geeignete Achse).

(b) Die so definierte Abbildung

$$\begin{array}{ccc} S^3 & \longrightarrow & \mathrm{SO}(3) \\ u & \longmapsto & \{a \mapsto uau^{-1}\} \end{array}$$

ist ein stetiger, surjektiver Homomorphismus von topologischen Gruppen mit Kern $\{\pm 1\}$.

(c) Folgern Sie, daß SO(3) zu $\mathbb{R}P^3$ homöomorph ist.

**Aufgabe 3.**

(a) Jede stetige Abbildung $f\colon X \to S^n$, die nicht surjektiv ist, ist *nullhomotop*, d.h. homotop zu einer Abbildung, die ganz $X$ auf einen einzigen Punkt in $S^n$ abbildet.

(b) Je zwei stetige Abbildungen $f, g\colon X \to CY$ sind homotop zueinander. (Hier bezeichnet $CY$ den Kegel über $Y$.)

(c) Eine stetige Abbildung $f\colon X \to Y$ ist nullhomotop genau dann, wenn sie zu einer stetigen Abbildung $CX \to Y$ erweitert.

**Aufgabe 4.** Der Raum

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\colon\ z \geq 0\} \setminus \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\colon\ y = 0\ ,\ \ 0 \leq z \leq 1\}$$

mit der von $\mathbb{R}^3$ induzierten Topologie ist einfach zusammenhängend.

Abgabe: Montag 2.11.09

Bis spätestens 13:45 Uhr in den Briefkasten im Keller des MI