WS 2010/11 Prof. Hansjörg Geiges

Geometrische Topologie

Übungsblatt 5

Aufgabe 1. Sei $L(p,q)$ ein Linsenraum wie in Aufgabe 5 von Übungsblatt 4 (p, q teilerfremd, $p \geq 2$). Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Seifert–van Kampen[1], daß $\pi_1(L(p,q)) \cong \mathbb{Z}_p$. Begründen Sie dieses Ergebnis alternativ mittels der Überlagerung $S^3 \to L(p,q)$.

Überlegen Sie sich dazu, daß $\pi_1(L(p,q))$ erzeugt wird von der Homotopieklasse der Schleife $t \mapsto (e^{2\pi i t/p}, 0)$, $t \in [0,1]$.

Aufgabe 2. (a) Sei σ ein Erzeuger der zyklischen Gruppe $\mathbb{Z}_p$. Zeigen Sie, daß dann für jedes $q' \in \mathbb{N}$ koprim zu p auch $\sigma^{q'}$ ein Erzeuger von $\mathbb{Z}_p$ ist.

(b) Seien $q, q' \in \mathbb{N}$ mit $qq' \equiv \pm 1 \mod p$. Zeigen Sie, daß $L(p,q)$ und $L(p,q')$ homöomorph zueinander sind

(i) mit Hilfe von Teil (a) und Aufgabe 5 von Übungsblatt 4;

(ii) mittels der Beschreibung durch eine Heegaard-Zerlegung. (Hinweis: Vertauschen Sie die Rollen der beiden Volltori.)

Bemerkung: Es gilt allgemeiner:

1. $L(p,q)$ ist homöomorph zu $L(p,q')$ genau dann, wenn
$$\pm q' \equiv q^{\pm 1} \mod p.$$
(Die Richtung "$\Leftarrow$" folgt aus den obigen Überlegungen).

2. $L(p,q)$ ist homotopie-äquivalent zu $L(p,q')$ genau dann, wenn $\pm qq'$ ein quadratischer Rest modulo p ist, d.h. $\pm qq' \equiv m^2 \mod p$ für ein geeignetes m.

   Zum Beispiel haben $L(7,1)$ und $L(7,2)$ den gleichen Homotopie-Typ, sind aber nicht homöomorph zueinander.

b.w.

[1] Siehe Abschnitt 5.3 meiner Vorlesung *Topologie* oder jedes Buch über Algebraische Topologie.

Aufgabe 3. Seien D^3 der Einheitsball im $\mathbb{R}^3$ und p, q wie in Aufgabe 1. Identifiziere jeden Punkt auf der oberen Hemisphäre ($z \geq 0$) von ∂D^3 mit dem Punkt, den man durch Rotation um $2\pi q/p$ um die z-Achse und Spiegelung in der xy-Ebene erhält. Sei $M(p, q)$ die resultierende 3-Mannigfaltigkeit.

(a) Der Zylinder
$$Z = D^3 \cap \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + y^2 \leq 1/2\right\}$$
wird unter dieser Identifikation zu einem Volltorus.

(b) Man zerschneide das Komplement $D^3 \setminus Z$ geeignet in p Stücke, um zu erkennen, daß $D^3 \setminus Z$ nach der Identifikation ebenfalls ein Volltorus ist.

(c) $M(p, q) = L(p, q)$.

Aufgabe 4. Der 3-Torus $T^3 = S^1 \times S^1 \times S^1$ besitzt eine Heegaard-Zerlegung vom Geschlecht 3.

Hinweis: Man kann T^3 realisieren durch einen Kubus, bei dem gegenüberliegende Seiten miteinander identifiziert werden.

Abgabe: Montag 22.11.10
Bis spätestens 11:00 Uhr in den Briefkasten im Keller des MI