WS 2011/2012

Prof. Hansjörg Geiges
Dr. Kai Zehmisch

Mathematik I

(für Physiker und Lehramtskandidaten)

Übungsblatt 4

Aufgabe 1. (a) Sei A eine Menge mit m Elementen und B eine Menge mit n Elementen. Wieviele Abbildungen $A \to B$ gibt es? Wieviele dieser Abbildungen sind injektiv?

(b) Zeigen Sie, daß die Abbildungen

$$(m,n) \longmapsto 2^m(2n+1)$$

und

$$(m,n) \longmapsto \binom{m+n+1}{2} + m + 1$$

Bijektionen von $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ auf $\mathbb{N}$ sind.

Aufgabe 2. (a) Stellen Sie folgende komplexe Zahlen in der Form $x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ dar:

$$\text{(i) } \frac{1}{1+i} \qquad \text{(ii) } \frac{2-3i}{4+i} \qquad \text{(iii) } \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^k,\ k \in \mathbb{Z} \qquad \text{(iv) } \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i}$$

(b) Skizzieren Sie die Menge derjenigen $z \in \mathbb{C}$, für die gilt

(i) $0 < \operatorname{Re}(iz) < 1$

(ii) $|z+2| < 1$

(iii) $|z-3| + |z+3| = 7$

(iv) $\operatorname{Im}((z-i)(z-1)^{-1}) = 0$

Aufgabe 3. Verifizieren Sie die folgenden Rechenregeln für komplexe Zahlen z, w:

(i)	$\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$	(vii)	$z^{-1} = \overline{z}\lvert z\rvert^{-2}$ für $z \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$
(ii)	$\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$	(viii)	$\lvert z\rvert \geq 0$, mit Gleichheit genau für $z = 0$
(iii)	$z + \overline{z} = 2 \cdot \operatorname{Re}(z)$	(ix)	$\lvert\overline{z}\rvert = \lvert z\rvert$
(iv)	$z - \overline{z} = 2 \cdot \operatorname{Im}(z) i$	(x)	$\lvert\operatorname{Re}(z)\rvert \leq \lvert z\rvert$, $\lvert\operatorname{Im}(z)\rvert \leq \lvert z\rvert$
(v)	$z = \overline{z}$ genau dann, wenn $z \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$	(xi)	$\lvert zw\rvert = \lvert z\rvert\lvert w\rvert$
(vi)	$z\overline{z} = \lvert z\rvert^2$	(xii)	$\lvert z+w\rvert \leq \lvert z\rvert + \lvert w\rvert$ (Dreiecksungleichung)

Erkären Sie, wie man geometrisch das Inverse z^{-1} zu gegebenem $z \in \mathbb{C}^*$ findet. Was bedeutet die Dreiecksungleichung geometrisch?

b.w.

Aufgabe 4. (a) Bestimmen Sie die komplexen Lösungen der Gleichung $z^3 = 1$. Zeigen Sie, daß diese Lösungen die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks in $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ bilden.

(b) Schreiben Sie das Polynom $z^3 - 1$ als Produkt zweier Polynome vom Grad 1 bzw. 2 mit reellen Koeffizienten.

Bonusaufgabe. (a) Geben Sie explizit eine Bijektion zwischen dem offenen Intervall

$$(0, 1) := \{x \in \mathbb{R}\colon\ 0 < x < 1\}$$

und $\mathbb{R}$ an.

(b) Geben Sie explizit eine Bijektion zwischen dem offenen Intervall $(0, 1)$ und dem abgeschlossenen Intervall $[0, 1]$ an.

Hinweis: Für (b) braucht man eine ähnliche Überlegung wie in der folgenden Knobelaufgabe.

Knobelaufgabe. (a) Das Hotel "Hilbert" besitzt abzählbar unendlich viele Zimmer. Bei Ihrer Ankunft im Hotel sind diese leider alle schon belegt. Trotzdem findet die Rezeptionistin durch geschicktes Umverteilen der Gäste noch ein Zimmer für Sie, ohne daß ein Gast das Hotel verlassen oder mit einem anderen das Zimmer teilen muß. Wie geht das?

(b) Jetzt kommt auch noch ein Reisebus der Canto(u)rs mit abzählbar unendlich vielen Reisenden an. Können diese auch noch untergebracht werden?

Abgabe: Montag 7.11.11,
bis spätestens 14 Uhr in den Briefkästen
im Keller des Mathematischen Instituts.