WS 2011/2012

Prof. Hansjörg Geiges
Dr. Kai Zehmisch

Mathematik I

(für Physiker und Lehramtskandidaten)

Übungsblatt 5

Aufgabe 1. (a) Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

(i) Für $q \in (0,1) \subset \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} q^k$$

(ii)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}{n^3}$$

(b) Zeigen Sie mittels der Bernoullischen Ungleichung, daß die Folge

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n$$

den Grenzwert 1 besitzt. Bestimmen Sie zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ explizit ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, daß für alle $n \geq n_0$ gilt $|a_n - 1| < \varepsilon$.

Aufgabe 2. Gegeben seien $a, x_1 \in \mathbb{R}^+$ und $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, mit $x_1^k > a$. Definiere rekursiv die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch

$$x_{n+1} = \frac{a}{k x_n^{k-1}} + \left(1 - \frac{1}{k}\right) x_n.$$

(a) Zeigen Sie, daß

$$\sqrt[k]{a} < x_{n+1} < x_n.$$

Dies bedeutet, daß die Folge (x_n) monoton fällt und nach unten beschränkt ist, also konvergiert.

Hinweis: Für den Beweis der linken Ungleichung dürfen Sie die Ungleichung zwischen dem allgemeinen geometrischen und arithmetischen Mittel verwenden, siehe Bonusaufgabe. Es geht aber auch mittels der Bernoullischen Ungleichung.

(b) Zeigen Sie, daß $\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt[k]{a}$.

Aufgabe 3. Zeigen Sie sowohl mittels des ε-δ-Kriteriums als auch mittels des Folgenkriteriums:

(a) Die Funktion

$$f\colon\ \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{1}{x^2}$$

ist stetig.

(b) Die Funktion $g\colon\ \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = 0$ für $|x| < \sqrt{2}$ und $g(x) = 1$ für $|x| > \sqrt{2}$ ist stetig. Wie sieht der Graph dieser Funktion aus?

b.w.

Aufgabe 4.

(a) Geben Sie ein Beispiel einer Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die nur an den Stellen $x_0 \in \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ stetig ist.

(b) Definieren Sie eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wie folgt:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}; \\ 1, & \text{falls } x = 0; \\ 1/q, & \text{falls } x = p/q \in \mathbb{Q} \text{ mit } p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \text{ teilerfremd.} \end{cases}$$

Dann ist f stetig in genau den Punkten $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. (Aufgaben dieser Art sind zu lesen als: "Zeigen Sie:...")

Bonusaufgabe. Seien $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}^+$. Dann gilt

$$\sqrt[k]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_k} \leq \frac{1}{k}(a_1 + \cdots + a_k),$$

mit Gleichheit genau dann, wenn alle a_i gleich sind.

Hinweis: Ersetzt man $a_1, \dots, a_k$ durch $\lambda a_1, \dots, \lambda a_k$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}^+$, so skalieren beide Seiten der Ungleichung um den Faktor λ. Daher genügt es, die Ungleichung unter der Annahme $a_1 + \cdots + a_k = k$ zu beweisen, d.h.

$$\sqrt[k]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_k} \leq 1, \quad \text{falls } \ a_1 + \cdots + a_k = k,$$

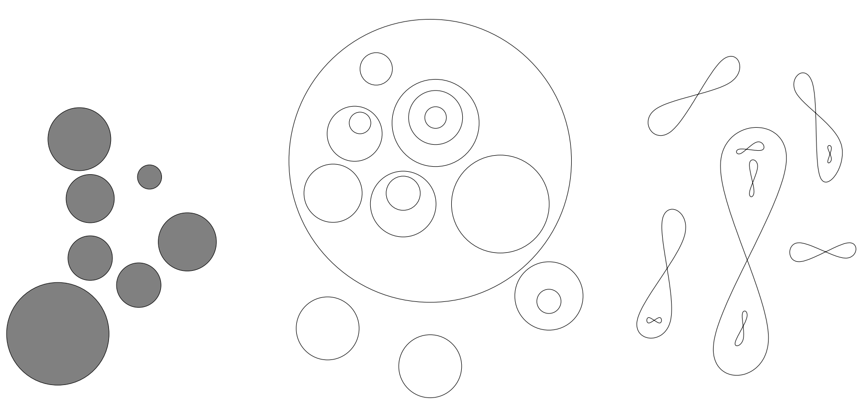
mit Gleichheit genau für $a_1 = \cdots = a_k = 1$. Dies läßt sich induktiv bewerkstelligen. Für $a_1, \dots, a_k, a_{k+1}$ nicht alle gleich 1 (und mit $a_1 + \cdots + a_{k+1} = k + 1$) können wir die Numerierung so wählen, daß $a_k > 1$ und $a_{k+1} < 1$. Betrachte dann für den Induktionsschritt von k auf $k + 1$ die k Zahlen $a_1, \dots, a_{k-1}, a'_k := a_k + a_{k+1} - 1$.

Knobelaufgabe.

(a) Jede Menge disjunkter Kreisscheiben in $\mathbb{R}^2$ is abzählbar.

(b) Es gibt eine überabzählbare Menge disjunkter Kreise in $\mathbb{R}^2$.

(c) Gibt es eine überabzählbare Menge disjunkter Achter in $\mathbb{R}^2$?



Abgabe: Montag 14.11.11,
bis spätestens 14 Uhr in den Briefkästen
im Keller des Mathematischen Instituts.