WS 2011/2012

Prof. Hansjörg Geiges
Dr. Kai Zehmisch

Mathematik I

(für Physiker und Lehramtskandidaten)

Übungsblatt 6

Aufgabe 1. Seien $D \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ (aber nicht notwendigerweise $x_0 \in D$) und $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Man schreibt

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = c,$$

falls gilt:

(i) Es existiert eine Folge (x_n) in $D \setminus \{x_0\}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Dazu sagt man auch: x_0 ist ein **Häufungspunkt** von D.

(ii) Für jede solche Folge (x_n) gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = c$.

Man kann auch $x_0 = \pm\infty$ und $c = \pm\infty$ zulassen. So bedeutet zum Beispiel

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

folgendes:

(i) Es existiert eine Folge (x_n) in D mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, d.h.

$$\forall\, R \in \mathbb{R}\; \exists\, n_0 \in \mathbb{N}:\; x_n > R \;\text{ für alle } n \geq n_0.$$

(ii) Für jede solche Folge (x_n) gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \infty$.

Berechnen Sie folgende Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \left(x \cdot \left[\frac{1}{x}\right]\right)$, mit $[\,.\,]$ die Gauß-Klammer;

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x}\right)$;
Hinweis: Dritte binomische Formel $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

(c) $\lim\limits_{x\to 1} (x^r - 1)/(x-1)$ für $r \in \mathbb{Q}$.
Hinweis: Berechnen Sie den Grenzwert zunächst für $r \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 2. Jede reelle polynomiale Funktion

$$\begin{array}{rccl} f\colon & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \end{array}$$

mit $a_n \neq 0$ und n ungerade besitzt eine Nullstelle. Zeigen Sie dies, indem Sie zunächst nachweisen, daß $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ oder $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \mp\infty$ gilt.

b.w.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, daß die durch

$$f(x) = \begin{cases} x\sin(1/x) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

definierte Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auf $\mathbb{R}$ stetig ist. Sie dürfen verwenden, daß die Funktion $x \mapsto \sin x$ auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ist (dies wird später in der Vorlesung gezeigt).

Aufgabe 4.

(a) Der Durchschnitt zweier kompakter Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ ist kompakt. Zeigen Sie dies auf zwei Weisen:

(i) direkt aus der Definition von Kompaktheit;

(ii) mittels des Satzes von Bolzano-Weierstraß.

(b) Der Durchschnitt unendlich vieler kompakter Mengen ist kompakt.

(c) Die Vereinigung zweier kompakter Mengen ist kompakt.

(d) Ist die Vereinigung unendlich vieler kompakter Mengen stets kompakt?

(e) Geben Sie ein Beispiel von nicht-leeren abgeschlossenen Mengen $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots$ mit der Eigenschaft, daß

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset.$$

(f) Für nicht-leere kompakte Mengen $K_1 \supset K_2 \supset K_3 \supset \dots$ gilt stets

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} K_i \neq \emptyset.$$

Bonusaufgabe. Sei n eine natürliche Zahl größer als 1. Dann gibt es keine stetige Funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, die jeden ihrer Werte genau n-mal annimmt.

Hinweis: Zwischenwertsatz.

Knobelaufgabe. (a) Kann man auf kariertem Papier ein gleichseitiges Dreieck zeichnen, dessen drei Ecken Gitterpunkte des Karopapiers sind?

Hinweis: Was wäre der Flächeninhalt eines solchen Dreiecks?

(b) Sei n eine natürliche Zahl größer als 2. Angenommen, $A_1 \dots A_n$ ist ein regelmäßiges n-Eck (d.h. alle Seiten sind gleich lang), dessen Ecken Gitterpunkte sind. Wähle einen Gitterpunkt O. Sei OB_i, $i = 1, \dots, n$, die Strecke mit gleicher Richtung und Länge wie A_iA_{i+1}, wobei mit A_nA_{n+1} die Seite A_nA_1 gemeint ist. Zeigen Sie, daß $B_1 \dots B_n$ ein regelmäßiges n-Eck aus Gitterpunkten ist, und daß das Ähnlichkeitsverhältnis $|B_1B_2|/|A_1A_2|$ der beiden n-Ecke gleich $2\sin(\pi/n)$ ist. Folgern Sie, daß für $n > 6$ kein solches n-Eck $A_1 \dots A_n$ existieren kann. Was gilt für $n \in \{4, 5, 6\}$?

Abgabe: Montag 21.11.11,
bis spätestens 14 Uhr in den Briefkästen
im Keller des Mathematischen Instituts.