WS 2011/2012

Prof. Hansjörg Geiges
Dr. Kai Zehmisch

Mathematik I

(für Physiker und Lehramtskandidaten)

Übungsblatt 8

Aufgabe 1. Die Funktion $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ sei gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{falls } x^2 < 2, \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, daß f differenzierbar ist, und daß $f' \equiv 0$. Ist f konstant?

(b) Zeigen Sie, daß die durch $g(x) = x + f(x)$ definierte Funktion $g\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ differenzierbar ist, und daß $g' \equiv 1$. Ist g streng monoton wachsend?

(c) Laut Korollar 6.11 der Vorlesung gilt für eine differenzierbare Funktion $h\colon I \to \mathbb{R}$ auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$: falls $h' \equiv 0$, so ist h konstant; falls $h' > 0$, so ist h streng monoton wachsend. Warum funktioniert der Beweis von Korollar 6.11 der Vorlesung für die obigen Beispiele nicht? Ist Korollar 6.11 etwa falsch?

Aufgabe 2. (a) Sei $f\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, deren Ableitung f' stetig in $x = 0$ ist, und für die $f'(0) > 0$ gilt. Dann ist f in einer Umgebung von 0 streng monoton wachsend.

(b) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die durch

$$f(x) = \begin{cases} x/2 + x^2 \sin(1/x) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

definierte Funktion. Zeigen Sie, daß f überall differenzierbar ist, und daß $f'(0) > 0$ gilt.

(c) Die in (b) definierte Funktion f ist in keiner Umgebung von 0 monoton wachsend.

Aufgabe 3. (a) Berechnen Sie das Taylor-Polynom $p_2(x)$ der Funktion $f(x) = e^{\cos x}$ an der Stelle $x_0 = 0$.

(b) Bestimmen Sie eine Konstante $M > 0$ derart, daß

$$|f(x) - p_2(x)| \leq M|x|^3 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Hinweis: Bei dieser Aufgabe dürfen Sie verwenden, daß die Eulersche e-Funktion $\exp : y \mapsto e^y$ auf $\mathbb{R}$ differenzierbar ist und mit ihrer Ableitung übereinstimmt, d.h. $\exp' = \exp$. Außerdem dürfen Sie als bekannt voraussetzen, daß der Wert der e-Funktion an der Stelle 1 gleich der Euler-Zahl $e = 2,71828...$ ist. (e^y steht in der Tat für die Potenz von e mit Exponent y; für irrationale Exponenten muß dies aber noch in der Vorlesung definiert werden.)

b.w.

Aufgabe 4. Es seien a, b positive reelle Zahlen mit $a < b$. Zeigen Sie mittels Riemannscher Unter- und Obersummen (d.h. *nicht* mit einer Stammfunktion), daß die Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$, Riemann-integrierbar ist, und daß der Wert des Integrals gegeben ist durch

$$\int_a^b x^2\,dx = \frac{1}{3}\left(b^3 - a^3\right).$$

Verwenden Sie dazu die Zerlegung $Z_n = (x_0, \ldots, x_n)$, $n \in \mathbb{N}$, gegeben durch

$$x_i = a + i\,\frac{b-a}{n}, \quad i = 0, \ldots, n.$$

Zeigen Sie die Existenz der Grenzwerte von $U(Z_n, f)$ und $O(Z_n, f)$ für $n \to \infty$, und daß beide Grenzwerte gleich $(b^3 - a^3)/3$ sind.

Bonusaufgabe. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, und seien $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ beschränkte Funktionen. Definiere

$$\inf_{x \in I} f := \inf\{f(x)\colon\ x \in I\}.$$

Wir schreiben im weiteren einfach $\inf f$. Analog sei $\sup f$ definiert. Zeigen Sie:

(a) $\inf(f+g) \geq \inf f + \inf g, \quad \sup(f+g) \leq \sup f + \sup g.$

(b) $\sup|f| - \inf|f| \leq \sup f - \inf f$

(c) Ist f Riemann-integrierbar, so auch $|f|$.

Hinweis: Für (c) können Sie (b) verwenden, oder die Ungleichung

$$\big||f(x)| - |f(x')|\big| \leq \big|f(x) - f(x')\big|.$$

Knobelaufgabe (Trost und Moral in der Mathematik)**.** Dem Göttinger Mathematiker Franz Rellich (1906–1955) wurde vorgeworfen, seine Analysis-Vorlesung sei anwendungsfern. Daraufhin stellte er folgende berühmte Aufgabe (siehe F. Wille, Humor in der Mathematik, S. 18). Wegen des politisch korrekten Zeitgeistes weise ich darauf hin, daß man den Studenten auch durch eine Studentin, und das Mädchen durch einen Knaben mit knackigen Waden ersetzen kann, zitiert wird aber die Originalversion:

> Ein Student geht auf der Weender Straße in Göttingen hinter einem Mädchen mit auffallend schönen Beinen her. Frage: In welcher Entfernung muß der Student hinter dem Mädchen hergehen, um die Beine, soweit sie unter dem Rock hervorschauen, unter dem größtmöglichen Blickwinkel zu sehen? Die Höhe des Rocksaumes über dem Erdboden sei dabei 60 cm, und die Augenhöhe des Studenten 178 cm.

Rellich pflegte hinzuzufügen: "Der Trost dabei ist, daß die gesuchte Entfernung nicht Unendlich ist, und die Moral, daß sie nicht Null ist."

Abgabe: Montag 5.12.11,
bis spätestens 14 Uhr in den Briefkästen
im Keller des Mathematischen Instituts.