WS 2011/2012

Prof. Hansjörg Geiges
Dr. Kai Zehmisch

Mathematik I

(für Physiker und Lehramtskandidaten)

Übungsblatt 10

Aufgabe 1.

(a) Sei $N \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, daß für $|z| \leq (N+1)/2$ gilt:

$$\left| \sum_{k=N}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \right| \leq 2 \frac{|z|^N}{N!}.$$

(b) Bestimmen Sie (ohne Verwendung der exp-Taste Ihres Taschenrechners) die ersten beiden Nachkommastellen in der Dezimalbruchdarstellung von

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2)^k}{k!}.$$

Aufgabe 2. Bestimmen Sie den Konvergenzradius R der folgenden Potenzreihen:

(1) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} 2^{k^2} z^k$ (2) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} k^5 z^k$

(3) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} z^{k^2}$ (4) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ mit $a_k = \begin{cases} 2^{-k}, & k \text{ gerade} \\ 3^{-k}, & k \text{ ungerade} \end{cases}$

Aufgabe 3. Bestimmen Sie, ob die folgenden Funktionenfolgen punktweise konvergieren/gleichmäßig konvergieren/nicht konvergieren, und bestimmen Sie gegebenenfalls die Grenzfunktion.

(1) $f_n(x) = \frac{1}{n} \cos nx, \quad x \in \mathbb{R}$

(2) $g_n(x) = f_n'(x) = -\sin nx, \quad x \in \mathbb{R}$

(3) $h_n(x) = \max\Big(n - n^2|x - 1/n|, 0\Big), \quad x \in [0,1]$. Wie sieht der Graph dieser Funktionen aus?

Aufgabe 4. Für $a \in \mathbb{R}$ definiere

$$L(a) := \lim_{x \to 0} \frac{e^{-x^2} - 1 + x \sin x}{\sqrt{1 - x^2} + ax^2 - 1}.$$

Zeigen Sie, daß $L(a) = 0$ für $a \neq 1/2$. Was ist $L(1/2)$?

Hinweis: Man verwende die Reihenentwicklung des Sinus oder die Regel von de L'Hospital (d.h. Johann Bernoulli).

b.w.

Bonusaufgabe. Zeigen Sie, daß die folgenden Reihen konvergieren, und bestimmen Sie deren Wert:

(a) $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots$

(b) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{f_k f_{k+2}}$

Hier bezeichnet f_k die k-te Fibonacci-Zahl, d.h. $f_0 = f_1 = 1$, $f_{k+1} = f_k + f_{k-1}$ für $k \in \mathbb{N}$.

Knobelaufgabe (zum 4. Advent)**.** Stellen Sie die folgenden komplexen Zahlen in der komplexen Zahlenebene graphisch dar:

$$a_n = r_n \Big(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \Big)^n, \quad n = 1, \dots, 8,$$

mit

$$r_n := \begin{cases} \text{1. Nachkommastelle in Aufgabe 1.(b), falls } n \text{ ungerade,} \\ \text{2. Nachkommastelle in Aufgabe 1.(b), falls } n \text{ gerade.} \end{cases}$$

Nun konstruieren Sie rekursiv die Zahlenfolge $\{n_k\}_{k=1,\dots,9}$:

$$\begin{aligned} n_0 &:= 0 \\ n_k &:= \text{Neunerrest von } n_{k-1} + m_k \qquad (k = 1, \dots, 9) \quad \text{mit} \\ m_k &:= \begin{cases} 1 & \text{falls } R < 1 \\ 3 & \text{falls } R = 1 \quad \text{in } 2.(k) \text{ mit } k = 1, \dots, 4 \text{ bzw. } 2.(k-3) \text{ falls } k = 5, 6, \\ 4 & \text{falls } R > 1 \end{cases} \\ m_k &:= \begin{cases} F(1) + 4 & \text{falls in } 3.(k-6) \text{ eine Grenzfunktion } F \text{ existiert,} \\ 3 & \text{falls die Funktionenfolge in } 3.(k-6) \text{ nicht konvergiert.} \end{cases} \quad (k = 7, 8, 9). \end{aligned}$$

Nun verbinden Sie die Punkte a_{n_k}, $k = 1, \dots, 9$, in dieser Reihenfolge durch je eine Strecke.

Schreiben Sie $L(1/2)$ aus Aufgabe 4 in der Form $L(1/2) = -p/q$ mit $p, q \in \mathbb{N}$ teilerfremd. Verzieren Sie das Bildchen weiter mit den Mengen

$$M_s = \{\lambda \Big[\frac{s}{10}(-p - 4 - (q+2)i) + \frac{10-s}{10}(-p + 4 - (q+8)i) \Big] + (1-\lambda) a_7 : \lambda \in [0,1]\}$$

für $s = 0, 1, \dots, 10$.

Abgabe: Montag 19.12.11,
bis spätestens 14 Uhr in den Briefkästen
im Keller des Mathematischen Instituts.