WS 2011/2012

Prof. Hansjörg Geiges
Dr. Kai Zehmisch

Mathematik I

(für Physiker und Lehramtskandidaten)

Übungsblatt 13

Aufgabe 1. Gegeben sei die reelle (4×5)-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie Basen für $\mathrm{Kern}(A)$ und $\mathrm{Bild}(A)$, wobei A als lineare Abbildung $\mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ aufgefaßt wird.

Aufgabe 2. Betrachte die Matrix A wie in Aufgabe 1 und die Vektoren

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \quad \text{und} \quad b' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

Bestimmen Sie alle Lösungen

(a) des homogenen Gleichungssystems $Ax = 0$,

(b) des inhomogenen Gleichungssystems $Ax = b$,

(c) des inhomogenen Gleichungssystems $Ax = b'$.

Aufgabe 3. Der Vektorraum $V = K^{2\times 2}$ der (2×2)-Matrizen über dem Körper K hat die Standardbasis

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sei $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in K^{2\times 2}$ fest. Betrachten Sie die linearen Abbildungen $f_1, f_2, f_3 \colon V \to V$, gegeben durch $f_1(X) = AX$, $f_2(X) = XA$, $f_3(X) = AX - XA$. Man bestimme die Matrizen von f_1, f_2, f_3 bezüglich der Standardbasis.

b.w.

Aufgabe 4. Es sei $E \in K^{n\times n}$ die Einheitsmatrix und $A = (a_{ij}) \in K^{n\times n}$ eine Matrix mit $a_{ij} = 0$ für $i \geq j$. Zeigen Sie:

(a) $A^n = 0$.

(b) Die Matrix $B := E + A$ ist invertierbar. Geben Sie auch explizit die inverse Matrix an.

Hinweis: Überlegen Sie sich, daß die Formel für die geometrische Reihe hier in geeigneter Weise verwendet werden kann.

Bonusaufgabe. Es sei V ein K-Vektorraum.

(a) Zeigen Sie, daß die Menge V^* der linearen Abbildungen $\varphi\colon V \to K$ mit Addition

$$(\varphi + \psi)(v) := \varphi(v) + \psi(v)$$

und Skalarmultiplikation

$$(\lambda\varphi)(v) := \lambda\varphi(v)$$

ein K-Vektorraum ist. Man nennt V^* den **Dualraum zu** V.

(b) Sei $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen K-Vektorräumen. Zeigen Sie, daß die Abbildung

$$\begin{array}{cccc} f^*\colon & W^* & \longrightarrow & V^* \\ & \varphi & \longmapsto & \varphi \circ f \end{array}$$

linear ist.

Sei $g\colon U \to V$ eine weitere lineare Abbildung. Man drücke $(f \circ g)^*$ mittels f^* und g^* aus.

(c) Sei $(b_1, \ldots, b_n)$ eine Basis von V. Man zeige, daß durch $b_i^*(b_j) = \delta_{ij}$ (Kronecker-Symbol) eine Basis von V^* definiert wird, die sogenannte **duale Basis**.

(d) Die n-dimensionalen Vektorräume V, V^* und $V^{**} := (V^*)^*$ sind selbstverständlich paarweise isomorph. Ein Isomorphismus $V \to V^*$ ist gegeben durch $b_i \mapsto b_i^*$, $i = 1, \ldots, n$, und lineare Erweiterung (d.h. jede Linearkombination der b_i wird abgebildet auf die entsprechende Linearkombination der b_i^*). Wie ändert sich dieser Isomorphismus, wenn man eine andere Basis für V (und die entsprechende duale Basis für V^*) wählt?

(e) Zeigen Sie, daß die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & V^{**} \\ v & \longmapsto & \{V^* \to K,\ \varphi \mapsto \varphi(v)\} \end{array}$$

ein Isomorphismus ist. Man nennt dies den **kanonischen Isomorphismus** zwischen V und V^{**}, da er basisunabhängig definiert ist.

Knobelaufgabe. Eine Ebene teilt den $\mathbb{R}^3$ in zwei Teile. Zwei sich schneidende Ebenen teilen den $\mathbb{R}^3$ in vier Teile. Drei Ebenen durch einen gemeinsamen Punkt, die nicht alle eine Gerade gemeinsam haben, teilen den $\mathbb{R}^3$ in acht Teile. In wie viele Teile wird der $\mathbb{R}^3$ von n Ebenen, $n \in \mathbb{N}$, zerlegt, wenn alle Ebenen einen Punkt gemeinsam haben, aber keine drei dieser Ebenen eine gemeinsame Gerade enthalten?

Abgabe: Montag 23.1.12,
bis spätestens 14 Uhr in den Briefkästen
im Keller des Mathematischen Instituts.