

# Geometrie der Himmelsmechanik

## Übungsblatt 4

**Aufgabe 1.** Wir betrachten eine Lösung  $\mathbf{r}$  des Keplerproblems mit  $c \neq 0$  und  $h < 0$  (elliptischer Fall). Zeigen Sie, ausgehend von der Gleichung

$$a(1 - e \cos u) = r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos f}$$

(vergl. Übungsblatt 3, Aufgabe 2), daß zwischen der wahren Anomalie  $f$  und der exzentrischen Anomalie  $u$  die folgende Beziehung gilt:

$$\tan \frac{f}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \cdot \tan \frac{u}{2}.$$

**Aufgabe 2.** Zeigen Sie, daß für Lösungen des Keplerproblems mit  $c \neq 0$  die exzentrische Anomalie  $u$  der Gleichung

$$u = \sqrt{\mu} \int_{t_0}^t \frac{d\tau}{r(\tau)} \quad (h = 0) \quad \text{bzw.} \quad u = \sqrt{\frac{\mu}{a}} \int_{t_0}^t \frac{d\tau}{r(\tau)} \quad (h \neq 0)$$

genügt. Auf diese Weise kann man  $u$  auch für  $c = 0$  definieren.

**Aufgabe 3.** Zwei Planeten der Masse  $m_1$  bzw.  $m_2$  bewegen sich auf elliptischen Bahnen um einen schweren Stern der Masse  $m_0$ . Idealisierend nehmen wir an, daß wir die Bewegung der beiden Planeten getrennt jeweils als Zweikörperproblem mit dem Stern behandeln können. Seien  $a_i$  und  $p_i$ ,  $i = 1, 2$ , die große Halbachse bzw. Periode der Planetenbahn relativ zum Stern. Bestimmen Sie das Verhältnis

$$\frac{p_1^2/a_1^3}{p_2^2/a_2^3}.$$

Dies liefert die Formulierung des dritten Keplerschen Gesetzes für mehrere Planeten.

**Aufgabe 4.** (a) Beschreiben Sie explizit eine Lösung des Zweikörperproblems, bei dem sich zwei Körper der Masse  $m_1$  bzw.  $m_2$  auf einer Kreisbahn um den gemeinsamen Schwerpunkt bewegen. Geben Sie dazu die Bahnen als parametrisierte Kurven  $t \mapsto \mathbf{r}_i(t)$ ,  $i = 1, 2$ , an und verifizieren Sie die Differentialgleichungen des Zweikörperproblems. Wie verhalten sich die Radien dieser Kreisbahnen in Abhängigkeit von  $m_1$  und  $m_2$ ?

(b) Erklären Sie im Zweikörperproblem zweier Körper  $P_1, P_2$  der Masse  $m_1$  bzw.  $m_2$  die Beziehung zwischen der Bahn von  $P_1$  relativ zu  $P_2$ , der Bahn von  $P_1$  relativ zum Schwerpunkt, und der Bahn von  $P_2$  relativ zum Schwerpunkt in Bezug auf

- (i) Bahntyp (elliptisch, parabolisch, hyperbolisch),
- (ii) Exzentrizität der Bahn,
- (iii) große bzw. reelle Halbachse der Bahn im elliptischen bzw. hyperbolischen Fall; Abstand  $d$  zur Direktrix im parabolischen Fall.

b.w.

(c) Der Schwerpunkt des Systems sei fest im Ursprung, so daß wir das Zweikörperproblem als zwei entkoppelte Zentralkraftprobleme auffassen können. Setze  $\mathbf{v}_i = \dot{\mathbf{r}}_i$ ,  $i = 1, 2$ , und definiere die Energie der beiden Körper durch

$$E_1 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 - \frac{Gm_1m_2^3}{(m_1 + m_2)^2} \cdot \frac{1}{r_1} =: T_1 + V_1$$

bzw.

$$E_2 = \frac{1}{2}m_2v_2^2 - \frac{Gm_2m_1^3}{(m_1 + m_2)^2} \cdot \frac{1}{r_2} =: T_2 + V_2.$$

Bestimmen Sie das Verhältnis  $T_1/T_2$  der kinetischen Energien, das der potentiellen Energien  $V_1/V_2$ , und das der Gesamtenergien  $E_1/E_2$ .

**Bonusaufgabe.** Die Gleichung  $\ddot{\mathbf{r}} = -\mu\mathbf{r}/r^3$ , die das Keplerproblem beschreibt, ist von der Ordnung 6 (als Differentialgleichung zweiter Ordnung in drei Raumvariablen). Mit anderen Worten, eine Lösung ist eindeutig festgelegt durch sechs Parameter, z.B. die Anfangswerte  $\mathbf{r}(0)$  und  $\dot{\mathbf{r}}(0)$ . Bei der Beschreibung der Planetenbahnen im Sonnensystem verwendet man üblicherweise sechs andere Parameter, die sogenannten *Bahnelemente*.

Dazu sei ein Koordinatensystem mit der Sonne  $S$  im Ursprung fixiert. Die genaue Wahl der entsprechenden Basis  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  des  $\mathbb{R}^3$  spielt im weiteren keine Rolle. In der astronomischen Praxis wählt man diese Basis so, daß  $\mathbf{e}_1$  und  $\mathbf{e}_2$  die Bahnebene der Erde (die sogenannte *Ekliptik*) aufspannen, die Erde dort eine positiv orientierte Bahn durchläuft, und so daß  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  positiv orientiert ist. Schließlich fixiert man  $\mathbf{e}_1$  in der Richtung eines Punktes im Sternbild Widder, der durch die Frühlingstagundnachtgleiche bestimmt ist (d.h. zum Frühlingsbeginn befindet sich die Sonne von der Erde aus gesehen in dieser Richtung).

Zeigen Sie, daß die Bahn eines jeden anderen Planeten, falls diese nicht vollständig in der Ekliptik verläuft, durch die Angaben der folgenden Parameter vollständig (als parametrisierte Kurve) bestimmt ist:

- (i) Die *Inklination*  $i$ , d.h. der Winkel zwischen  $\mathbf{e}_3$  und dem Normalenvektor  $\mathbf{n}$  der Bahnebene, der so gewählt ist, daß er in die Richtung des Drehimpulses des Planeten zeigt.
- (ii) Das *Argument des aufsteigenden Knotens*, d.h. der Winkel  $\Omega$  zwischen  $\mathbf{e}_1$  und der Richtung von  $S$  zum Schnittpunkt  $A$  der Planetenbahn mit der Ekliptik, wo der Planet die Ekliptik 'von unten nach oben' durchstößt.
- (iii) Die Exzentrizität  $e$  der Ellipsenbahn des Planeten.
- (iv) Die große Halbachse  $a$  der Ellipsenbahn.
- (v) Das *Argument des Perihels*, d.h. der Winkel  $\omega = \angle ASP$ , wobei  $P$  das Perihel des Planeten bezeichnet, also den Bahnpunkt mit dem geringsten Sonnenabstand. Üblicherweise ersetzt man  $\omega$  durch  $\varpi = \omega + \Omega$ , den sogenannten *Längengrad des Perihels*.
- (vi) Der Zeitpunkt  $T$  einer Passage des Planeten durch das Perihel.

Zeichnen Sie ein Bild, an dem diese geometrischen Größen deutlich werden.

Abgabe: Montag 5.11.12,  
bis spätestens 13:30 Uhr in den Briefkästen  
im Mathematik-Container bei der Physik.