WS 2012/13

Prof. Hansjörg Geiges
Dr. Kai Zehmisch

Geometrie der Himmelsmechanik

Übungsblatt 7

Aufgabe 1. Es seien $a_0, \ldots, a_4$ positive reelle Zahlen. Zeigen Sie, daß das Polynom

$$p(x) = x^5 + a_4 x^4 + a_3 x^3 - a_2 x^2 - a_1 x - a_0$$

genau eine positive reelle Nullstelle hat. Diese Aussage, die wir bei der Herleitung der Eulerschen kollinearen Lösungen des Dreikörperproblems verwendet hatten, ist ein spezieller Fall der *Vorzeichenregel von Descartes*, der zufolge die Anzahl der positiven Nullstellen eines reellen Polynoms nach oben beschränkt ist durch die Anzahl der Vorzeichenwechsel der Koeffizienten.

Hinweis: Betrachten Sie die Ableitungen p', p'', p'''.

Aufgabe 2. (a) In der Vorlesung hatten wir mit einer Abbildung $t \mapsto A(t) \in \mathrm{SO}(3)$ die momentane Winkelgeschwindigkeit $\omega_A(t) \in \mathbb{R}^3$ assoziiert, die durch die Gleichung

$$A^T \dot{A} \mathbf{x} = \omega_A \times \mathbf{x}$$

für $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ charakterisiert war. Sei nun $t \mapsto B(t)$ eine weitere Abbildung mit Werten in $\mathrm{SO}(3)$. Zeigen Sie, daß

$$\omega_{AB}(t) = B^T(t)\omega_A(t) + \omega_B(t).$$

(b) Die Bewegung von drei Punkten, die stets auf einer (sich bewegenden) Geraden durch den Ursprung liegen, kann beschrieben werden in der Form

$$\mathbf{r}_i(t) = A(t)\mathbf{x}_i(t), \quad i = 1, 2, 3,$$

mit $\mathbf{x}_i(t) = (x_i(t), 0, 0)^T$. Die $\mathbf{r}_i$ ändern sich nicht, wenn wir $A(t)$ ersetzen durch $A(t)B(t)$ mit

$$B(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi(t) & -\sin\varphi(t) \\ 0 & \sin\varphi(t) & \cos\varphi(t) \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie ω_B und zeigen Sie damit, daß $B(t)$ so gewählt werden kann, daß $\omega_{AB}(t)$ von der Form $(0, q(t), r(t))^T$ ist.

(c) Sei C eine Matrix in $\mathrm{SO}(3)$, die nicht von der Zeit abhängt. Zeigen Sie, daß $\omega_{CA} = \omega_A$. Da mit $\mathbf{r}_i$ auch $C\mathbf{r}_i$ eine Lösung des Dreikörperproblems ist (siehe Übungsblatt 1, Aufgabe 1), kann man daher ohne Einschränkung immer annehmen, daß z.B. $A(0)$ die Einheitsmatrix ist, ohne dabei die momentane Winkelgeschwindigkeit zu verändern. Es gilt dann $\dot{A}(0)\mathbf{x} = \omega_A(0) \times \mathbf{x}$, was die Bezeichnung 'momentane Winkelgeschwindigkeit' für $\omega_A(0)$ rechtfertigt.

b.w.

Aufgabe 3. (Zählt wie zwei Aufgaben.) Sei $t \mapsto \mathbf{r}_i(t)$, $i = 1, 2, 3$, eine kollineare Lösung des Dreikörperproblems, d.h. zu jedem Zeitpunkt t sollen die drei Punkte $\mathbf{r}_i(t)$ auf einer Geraden liegen. Wir wollen allerdings annehmen, daß diese Gerade im Raum *nicht* festbleibt. Der Schwerpunkt des Systems soll im Ursprung fixiert sein. Im folgenden soll die allgemeine Form dieser kollinearen Lösungen hergeleitet werden.

Nach Aufgabe 2 können wir die $\mathbf{r}_i$ in der Form $\mathbf{r}_i(t) = A(t)(x_i(t), 0, 0)^T$ schreiben, wobei A so gewählt wurde, daß $\omega_A(t) = (0, q(t), r(t))^T$.

(a) Zeigen Sie, analog zum Beweis des Satzes von Lagrange, daß dann die Gleichungen

$$2r\dot{x}_i + \dot{r}x_i = 0 \quad \text{und} \quad 2q\dot{x}_i + \dot{q}x_i = 0$$

gelten.

(b) Folgern Sie aus (a) die Existenz von zwei reellen Konstanten α, β, die nicht beide verschwinden, für welche

$$\alpha q + \beta r = 0$$

gilt. Schließen Sie weiter, daß es eine Matrix $B \in \mathrm{SO}(3)$ gibt, die nicht von t abhängt, so daß weiterhin $\mathbf{r}_i(t) = A(t)B(x_i(t), 0, 0)^T$ gilt, aber $\omega_{AB} = (0, 0, \tilde{r}(t))^T$. Das Vorschalten dieser Matrix B entspricht lediglich einer anderen Koordinatenwahl. Mit anderen Worten, wir dürfen ohne Einschränkung annehmen, daß A von vornherein so gewählt wurde, daß $\omega_A(t) = (0, 0, r(t))^T$ gilt.

Folgern Sie weiter, daß wir dann o.E. die $\mathbf{r}_i$ in der Form

$$\mathbf{r}_i(t) = x_i(t) \begin{pmatrix} \cos\varphi(t) \\ \sin\varphi(t) \end{pmatrix}$$

mit $\dot{\varphi} = r$ schreiben können.

(c) Zeigen Sie, unter Verwendung der expliziten Form der $\mathbf{r}_i$ aus (b), daß der Drehimpuls c des Systems gegeben ist durch $c = \lambda^2\dot{\varphi}$ mit $\lambda(t) := \sqrt{\sum_{i=1}^3 m_i x_i^2(t)}$. Da c konstant ist, folgt hieraus entweder $\varphi \equiv 0$ — diesen Fall der Bewegung auf einer festen Geraden wollten wir aber ausschließen — oder $\dot{\varphi}(t) \neq 0$ für alle t.

(d) Schließen Sie aus $c = \lambda^2\dot{\varphi}$ und den Gleichungen in (a) — unter Beachtung von $\dot{\varphi} = r$ —, daß es Konstanten $a_i \in \mathbb{R}$ gibt, so daß $x_i(t) = a_i\lambda(t)$. Folgern Sie wie im Beweis des Satzes von Lagrange, daß λ einer Differentialgleichung

$$\lambda^2\ddot{\lambda} - \frac{c^2}{\lambda} = -\mu$$

mit einer Konstanten $\mu > 0$ genügt.

(e) Wir nehmen ohne Einschränkung an, daß $a_1 < a_2 < a_3$. Zeigen Sie, daß zwischen den Konstanten a_i und μ die folgenden Beziehungen gelten müssen:

$$\begin{aligned}
-\mu a_1 &= G\Big(\frac{m_2}{(a_2 - a_1)^2} + \frac{m_3}{(a_3 - a_1)^2}\Big) \\
-\mu a_2 &= G\Big(-\frac{m_1}{(a_2 - a_1)^2} + \frac{m_3}{(a_3 - a_2)^2}\Big) \\
-\mu a_3 &= G\Big(-\frac{m_1}{(a_3 - a_1)^2} - \frac{m_2}{(a_3 - a_2)^2}\Big)
\end{aligned}$$

Wie in der Vorlesung sieht man schlußendlich, daß die Wahl von $a_2 - a_1$ die Konstanten μ, a_1, a_2 und a_3 festlegt. Jede Lösung $t \mapsto \lambda(t)(\cos\varphi(t), \sin\varphi(t))$ des Keplerproblems liefert dann eine eindeutige kollineare Lösung des Dreikörperproblems.

Abgabe: Montag 26.11.12,
bis spätestens 13:30 Uhr in den Briefkästen
im Mathematik-Container bei der Physik.