WS 2012/13

Prof. Hansjörg Geiges
Dr. Kai Zehmisch

Geometrie der Himmelsmechanik

Übungsblatt 9

Aufgabe 1. Eine $(k-1)$-dimensionale Sphäre im $\mathbb{R}^n$ mit Mittelpunkt $\mathbf{c}$ und Radius r ist eine Menge der Form

$$\{\mathbf{x} = \mathbf{c} + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathbf{v}_i \in \mathbb{R}^n \colon \; \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^2 = r^2\};$$

hierbei sind $\mathbf{c}$ ein beliebiger Punkt im $\mathbb{R}^n$ und $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ ein k-Tupel orthonormaler Vektoren. Zeigen Sie:

(a) Für $k = n$ entspricht dies der Definition

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \colon \; \|\mathbf{x} - \mathbf{c}\| = r\}.$$

(b) Jede $(k-1)$-dimensionale Sphäre ist die Schnittmenge einer $(n-1)$-dimensionalen Sphäre (mit dem gleichen Mittelpunkt $\mathbf{c}$) und einem affinen Teilraum des $\mathbb{R}^n$, der $\mathbf{c}$ enthält.

(c) Der Durchschnitt zweier Sphären beliebiger Dimension im $\mathbb{R}^n$ ist wieder eine Sphäre, ein Punkt, oder leer.

Aufgabe 2. Sei Ψ die stereographische Projektion der Einheitssphäre $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ um den Ursprung vom Nordpol $N = (0, \ldots, 0, 1) \in S^{n-1}$ auf die Äquatorebene $\{x_n = 0\} \equiv \mathbb{R}^{n-1}$. Wir erweitern Ψ zu einer Abbildung $S^{n-1} \to \mathbb{R}^{n-1} \cup \{\infty\}$, indem wir $\Psi(N) = \infty$ setzen.

Sei S^{n-1} versehen mit der Relativtopologie im $\mathbb{R}^n$, d.h. die offenen Mengen sind genau die Durchschnitte von S^{n-1} mit offenen Mengen im $\mathbb{R}^n$. Die Menge $\mathbb{R}^{n-1} \cup \{\infty\}$ werde mit der Topologie versehen, die man als die *Einpunktkompaktifizierung* von $\mathbb{R}^{n-1}$ bezeichnet, d.h. offene Mengen in $\mathbb{R}^{n-1} \cup \{\infty\}$ seien genau die Mengen folgenden Typs:

(i) offene Mengen im $\mathbb{R}^{n-1}$,

(ii) Mengen der Form $(\mathbb{R}^{n-1} \setminus K) \cup \{\infty\}$, wobei K eine kompakte Teilmenge des $\mathbb{R}^{n-1}$ ist.

Zeigen Sie:

(a) Dies definiert in der Tat eine Topologie auf $\mathbb{R}^{n-1} \cup \{\infty\}$, d.h.

- $\emptyset$ und $\mathbb{R}^{n-1} \cup \{\infty\}$ sind offen;
- der Durchschnitt endlich vieler offener Mengen ist offen;
- die Vereinigung beliebig vieler offener Mengen ist offen.

(b) $\mathbb{R}^{n-1} \cup \{\infty\}$ ist kompakt, d.h. wird $\mathbb{R}^{n-1} \cup \{\infty\}$ von einem System offener Mengen überdeckt, so überdecken bereits endlich viele dieser Mengen den ganzen Raum.

(c) Die Abbildung $\Psi \colon S^{n-1} \to \mathbb{R}^{n-1} \cup \{\infty\}$ ist ein Homöomorphismus, d.h. bijektiv und beiderseits stetig, wobei Stetigkeit bedeutet, daß das Urbild jeder offenen Menge wieder offen ist.

b.w.

Aufgabe 3. (a) Sei Φ die Inversion an einer Sphäre S_0^{n-1} mit Mittelpunkt $\mathbf{p}$ im $\mathbb{R}^n$. Führen Sie sorgfältig das Argument aus, das in der Vorlesung nur angedeutet wurde: Affine Ebenen (beliebiger Dimension) im $\mathbb{R}^n$, die den Punkt $\mathbf{p}$ nicht enthalten, werden unter Φ abgebildet auf Sphären durch $\mathbf{p}$ und umgekehrt. Zeigen Sie dazu die 'Umkehrung' des Lemmas 7.4 der Vorlesung.

(b) Sei Φ die Inversion an der Einheitssphäre (mit Mittelpunkt im Ursprung) $S^2 \subset \mathbb{R}^3$. Berechnen Sie die Jacobische Matrix der Abbildung Φ und zeigen Sie, daß diese Matrix in jedem Punkt $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ proportional zu einer orthogonalen Matrix ist.

(c) Zeigen Sie, daß eine differenzierbare Abbildung zwischen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ genau dann winkeltreu ist, wenn ihre Jacobische Matrix in jedem Punkt proportional zu einer orthogonalen Matrix ist.

Mit (b) und (c) haben wir also einen rechnerischen Beweis dafür, daß die Inversion eine winkeltreue Abbildung ist. Winkeltreue Abbldungen nennt man auch *konforme* Abbildungen.

Aufgabe 4. Eine *Geodätische* auf einer Untermannigfaltigkeit M des $\mathbb{R}^n$ (oder allgemeiner einer abstrakten Riemannschen Mannigfaltigkeit) ist eine lokal längenminimierende Kurve γ, die proportional zur Bogenlänge parametrisiert ist. Parametrisierung proportional zur Bogenlänge bedeutet, daß γ eine differenzierbare Abbildung eines Intervalles $I \subset \mathbb{R}$ nach M ist mit $|\gamma'| = \text{konst.} \neq 0$. Lokal längenminimierend bedeutet, daß jeder Punkt auf der Kurve eine Umgebung U in M besitzt, so daß zwischen je zwei Punkten in $\gamma(I) \cap U$ die Kurve γ die kürzeste Verbindung darstellt.

Für Untermannigfaltigkeiten kann man Geodätische $\gamma\colon I \to M$ als diejenigen Kurven mit $\gamma' \neq 0$ charakterisieren, deren 'Beschleunigung' γ'' stets orthogonal zu M ist, d.h.

$$\gamma''(s) \perp T_{\gamma(s)}M \quad \text{für alle } s \in I.$$

Zeigen Sie:

(a) Eine solche Kurve ist notwendigerweise proportional zur Bogenlänge parametrisiert.

(b) Die Geodätischen auf $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ sind genau die Großkreise, parametrisiert proportional zur Bogenlänge.

Geben Sie ein Beispiel von zwei Punkten $x, y \in S^{n-1}$ und einer Geodätischen zwischen diesen Punkten, die nicht die kürzeste Verbindung zwischen diesen Punkten ist.

Abgabe: Montag 10.12.12,
bis spätestens 13:30 Uhr in den Briefkästen
im Mathematik-Container bei der Physik.