WS 2013/2014

Prof. Hansjörg Geiges
Dipl.-Math. Christian Evers

Differentialtopologie I

Übungsblatt 1

Aufgabe 1. (a) Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum, d.h. eine Menge X mit einem System $\mathcal{O}$ von Teilmengen von X, die wir offene Mengen nennen, mit den Eigenschaften

(i) $\emptyset, X \in \mathcal{O}$.

(ii) Falls $U, V \in \mathcal{O}$, dann auch $U \cap V \in \mathcal{O}$.

(iii) Falls $U_\alpha \in \mathcal{O}$ für alle $\alpha \in A$, wobei A eine beliebige Indexmenge ist, so auch $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \mathcal{O}$.

Sei $M \subset X$ eine beliebige Teilmenge und $\mathcal{O}_M$ die **Relativ-Topologie** oder **induzierte Topologie**, d.h. für eine Teilmenge $V \subset M$ gilt $V \in \mathcal{O}_M$ genau dann, wenn es ein $U \in \mathcal{O}$ gibt, so daß $V = M \cap U$. Zeigen Sie, daß dies in der Tat eine Topologie auf M definiert.

(b) Sei $\mathcal{O}$ die gewöhnliche Topologie auf dem $\mathbb{R}^2$. Dann ist die auf $\mathbb{R}^1 \subset \mathbb{R}^2$ induzierte Topologie die gewöhnliche Topologie des $\mathbb{R}^1$.

Aufgabe 2. (a) Sei $a \in \mathbb{R}^+$. Zeigen Sie, daß die Abbildung

$$x \longmapsto \frac{ax}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

einen Diffeomorphismus des Intervalles $(-a, a)$ auf ganz $\mathbb{R}$ definiert.

(b) Konstruieren Sie analog einen Diffeomorphismus des offenen Balles

$$B_a := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < a\}$$

auf den ganzen $\mathbb{R}^n$.

(c) Ist jede bijektive, differenzierbare Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein Diffeomorphismus?

Aufgabe 3. (a) Ist die Vereinigung der beiden Koordinatenachsen in $\mathbb{R}^2$ eine Untermannigfaltigkeit?

(b) Für welche reellen Zahlen a definiert die Gleichung $x^2 + y^2 - z^2 = a$ eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$?

Aufgabe 4. Definiere eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x \leq 0. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, daß f eine C^∞–Funktion ist.

(b) Konstruieren Sie eine C^∞–Funktion $h\colon \mathbb{R} \to [0, 1]$ mit folgenden Eigenschaften:

- $h(x) = 1$ für $x \in [-1, 1]$,
- $h(x) = 0$ für $x \leq -2$ und $x \geq 2$.

Abgabe: Mittwoch 23.10.13 in der Vorlesung.