Prof. Hansjörg Geiges
Dipl.-Math. Christian Evers

Differentialtopologie I

Übungsblatt 6

Aufgabe 1. Seien X und Y glatte Vektorfelder auf einer Mannigfaltigkeit M und $f \in C^\infty(M)$. Dann definiert, wie in der Vorlesung gezeigt, die Zuordnung

$$\begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ p & \longmapsto & X_p f \end{array}$$

eine differenzierbare Funktion Xf auf M; analog für Y. Definiere eine Funktion auf M durch

$$p \longmapsto [X,Y]_p f := X_p(Yf) - Y_p(Xf)\,.$$

Zeigen Sie, daß die Zuordnung $p \longmapsto [X,Y]_p$ ein glattes Vektorfeld auf M definiert

(a) indem Sie zeigen, daß $[X,Y]_p$ für jedes p eine Derivation von $\mathcal{E}_M(p)$ ist.

(b) durch Berechnung von $[X,Y]$ in lokalen Koordinaten.

Das Vektorfeld $[X,Y]$ heißt **Lie-Klammer** von X und Y.

(c) Verifizieren Sie die Jacobi-Identität

$$[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0$$

für beliebige glatte Vektorfelder X, Y, Z auf M.

Aufgabe 2. Geben Sie durch ein Bild, möglichst aber auch durch eine explizite Beschreibung in geeigneten Karten, ein differenzierbares Vektorfeld auf S^2 an, das

(a) genau zwei Nullstellen hat.

(b) genau eine Nullstelle hat.

Aufgabe 3. (a) Konstruieren Sie eine differenzierbare (d.h. C^∞) Funktion $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, deren Menge kritischer Werte dicht in $\mathbb{R}$ ist.

(b) Beschreiben Sie eine differenzierbare Abbildung $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ mit der Eigenschaft, daß die Menge

$$f(\{t \in \mathbb{R} : t \geq k\})$$

für jedes $k \in \mathbb{N}$ ganz $\mathbb{Q}^n$ enthält.

Aufgabe 4. Sei T^*M das Kotangentialbündel einer m-dimensionalen differenzierbaren Mannigfaltigkeit M, und $\pi\colon\ T^*M \longrightarrow M$ die natürliche Projektion. Betrachte das folgende kommutative Diagramm, in welchem die horizontalen Abbildungen die natürlichen Projektionen der Tangentialbündel sind:

$$\begin{array}{ccc} T(T^*M) & \longrightarrow & T^*M \\ {\scriptstyle T\pi}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \pi} \\ TM & \longrightarrow & M \end{array}$$

Definiere eine 1-Form auf der Mannigfaltigkeit T^*M, d.h. einen Schnitt λ des Vektorbündels $T^*(T^*M) \longrightarrow T^*M$, durch

$$\lambda_\alpha(X) := \alpha(T_\alpha\pi(X))$$

für $\alpha \in T^*M$, $X \in T_\alpha T^*M$.

(a) Verifizieren Sie, daß die Zuordnung $\alpha \longmapsto \lambda_\alpha$ in der Tat einen Schnitt des Kontangentialbündels $T^*(T^*M) \longrightarrow T^*M$ von T^*M definiert.

(b) Seien $(q_1, \dots, q_m)$ lokale Koordinaten auf M und $(p_1, \dots, p_m)$ die zugehörigen dualen Koordinaten in den Fasern von T^*M; mit anderen Worten: Falls $q \in M$ in einer lokalen Karte durch die Koordinaten $(q_1, \dots, q_m)$ beschrieben ist, so bezeichnen die Koordinaten $(q_1, \dots, q_m, p_1, \dots, p_m)$ den Kotangentialvektor

$$\Big(\sum_{i=1}^m p_i\, dq_i\Big)_q\colon \quad \begin{array}{ccc} T_qM & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \displaystyle\sum_{i=1}^m X_i \frac{\partial}{\partial x_i} & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^m p_i X_i. \end{array}$$

Zeigen Sie, daß λ in diesen lokalen Koordinaten beschrieben wird durch

$$\lambda_{(q_1,\dots,q_m,p_1,\dots,p_m)} = \sum_{i=1}^m p_i\, dq_i\, .$$

(c) Für jede 1-Form α auf M, aufgefaßt als Abbildung $\alpha\colon\ M \longrightarrow T^*M$, gilt $\alpha = \alpha^*\lambda$.

Bemerkung. λ heißt **Liouville-Form**. In der klassischen Mechanik beschreibt M den Konfigurationsraum eines mechanischen Systems und T^*M dessen Phasenraum (= Raum aller möglichen Positionen und Impulse des mechanischen Systems). Die 1-Form λ bildet den Ausgangspunkt für den **Hamilton-Formalismus**. Zu einer **Hamilton-Funktion** $H\colon\ T^*M \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert man ein **Hamiltonsches Vektorfeld** X_H auf T^*M durch

$$d\lambda(X_H, \cdot) = -dH\, .$$

Hier ist $d\lambda$ die äußere Ableitung von λ, d.h. die 2-Form, die in lokalen Koordinaten durch

$$d\lambda = \sum_{i=1}^m dp_i \wedge dq_i$$

gegeben ist. Der Fluß von X_H beschreibt dann die zeitliche Entwicklung des mechanischen Systems.

Abgabe: Mittwoch 27.11.13 in der Vorlesung.