Prof. Hansjörg Geiges
Dipl.-Math. Christian Evers

Differentialtopologie I

Übungsblatt 7

Aufgabe 1. (a) Beschreiben Sie einen Diffeomorphismus der offenen n-dimensionalen Kreisscheibe, der keinen Fixpunkt hat.

(b) Beschreiben Sie einen Diffeomorphismus von D^2, der nur am Rand Fixpunkte hat.

Aufgabe 2. Seien M und N differenzierbare Mannigfaltigkeiten und $p \in M$ ein Punkt. Zeigen Sie:

(a) Die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} C^\infty(M) & \longrightarrow & \mathcal{E}(p) \\ f & \longmapsto & \bar{f} \end{array},$$

die jeder Funktion ihren Funktionskeim in p zuordnet, ist surjektiv.

(b) Eine stetige Abbildung $f\colon M \to N$ ist differenzierbar genau dann, wenn für jede Funktion $g \in C^\infty(N)$ gilt, daß $g \circ f \in C^\infty(M)$.

Aufgabe 3. Sei M eine kompakte m-dimensionale Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie: Es gibt eine differenzierbare Abbildung $M \to \mathbb{R}^{2m-1}$, die immersiv ist außerhalb einer endlichen Menge von Punkten.

Beginnen Sie dazu mit einer Immersion $f\colon M \to \mathbb{R}^{2m}$ und einem regulären Wert $a \in \mathbb{R}^{2m}$ der Abbildung

$$\begin{array}{cccc} Tf\colon & TM & \longrightarrow & \mathbb{R}^{2m} \\ & T_pM \ni X & \longmapsto & T_pf(X) \in T_{f(p)}\mathbb{R}^{2m} \equiv \mathbb{R}^{2m} \end{array}.$$

Zeigen Sie:

(a) $(Tf)^{-1}(a)$ ist eine endliche Menge.

(**Hinweis:** Dazu genügt es (warum?), die Abbildung Tf eingeschränkt auf einer kompakten Teilmenge der Form

$$\{X \in TM\colon \|X\| \leq c\}$$

zu betrachten, wobei $\|X\| = \sqrt{\langle X, X\rangle}$ mittels einer Riemannschen Metrik auf M bestimmt ist.)

(b) Sei π eine Orthogonalprojektion parallel zu a. Dann hat $\pi \circ f$ die gewünschten Eigenschaften.

Aufgabe 4. (a) Zeigen Sie, daß die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \longmapsto & (x, xy, y^2) \end{array}$$

immersiv ist außerhalb von $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$.

(b) Beschreiben Sie das Bild dieser Abbildung.

Whitney hat gezeigt, daß diese Abbildung ein Modell für die in Aufgabe 3 auftretenden Singularitäten im Fall $m = 2$ ist.

Abgabe: Mittwoch 4.12.13 in der Vorlesung.