Prof. Hansjörg Geiges
Dipl.-Math. Christian Evers

Analysis I

Übungsblatt 6

Aufgabe 1. Einem Krug, der 1 Liter eines Gemisches aus Diäthylenglykol und Wein enthält, werden p Liter ($0 < p < 1$) entnommen und durch reines Diäthylenglykol ersetzt. Von dieser neuen Mischung werden sodann p Liter aus dem Krug gegossen und durch reinen Wein ersetzt. Dieses aus der österreichischen Weinherstellung bekannte Doppelverfahren wird fortgesetzt. Zeigen Sie, daß das Mischungsverhältnis Wein zu Diäthylenglykol konvergiert, und bestimmen Sie seinen Grenzwert.

Aufgabe 2. Zeigen Sie, daß für jede komplexe Zahl z mit $|z| > 1$ und jede natürliche Zahl k gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{z^n} = 0.$$

Hinweis: Schreiben Sie $|z| = 1 + x$ mit $x > 0$. Die Binomialentwicklung liefert dann

$$|z|^n > \binom{n}{k+1} x^{k+1}.$$

Schätzen Sie diesen Ausdruck z.B. für $n > 2k$ geeignet ab, so daß Sie eine Abschätzung der Form

$$\frac{n^k}{|z|^n} < c(k,x) \cdot \frac{1}{n}$$

erhalten, wobei $c(k,x)$ eine reelle Zahl ist, die nur von k und x abhängt.

Die folgende Aufgaben verwenden den Begriff der **uneigentlichen Konvergenz**: Wir setzen

$$\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$$

und definieren eine Ordnung durch $-\infty < x < \infty$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Außerdem setzen wir

$$\begin{aligned}
\infty + x &:= \infty && \text{für } x \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}\\
-\infty + x &:= -\infty && \text{für } x \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}\\
\infty \cdot x := \infty, \quad (-\infty) \cdot x &:= -\infty && \text{für } x \in \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}\\
\infty \cdot x := -\infty, \quad (-\infty) \cdot x &:= \infty && \text{für } x \in \mathbb{R}^- \cup \{-\infty\}\\
x/\infty := 0, \quad x/(-\infty) &:= 0 && \text{für } x \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Ausdrücke wie "$0 \cdot \infty$" und "$(-\infty) + \infty$" sind *nicht* definiert!

Wir sagen, eine reelle Folge (a_n) **konvergiert uneigentlich** gegen ∞ (bzw. $-\infty$), falls zu jedem $C \in \mathbb{R}$ ein $n_0 = n_0(C) \in \mathbb{N}$ existiert mit $a_n \geq C$ (bzw. $a_n \leq C$) für alle $n \geq n_0$.

Notation: $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ (bzw. $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$).

Analog erweitert man die Definition des Limes inferior und des Limes superior auf unbeschränkte reelle Folgen, indem man $\inf\{a_k \colon k \geq n\} = -\infty$ setzt, falls $\{a_k \colon k \geq n\}$ nicht nach unten beschränkt ist, und analog für das Supremum.

b.w.

Aufgabe 3. Geben Sie Beispiele reeller Zahlenfolgen (a_n), (b_n) mit $\lim a_n = \infty$ und $\lim b_n = 0$ an, so daß je einer der folgenden Fälle eintritt:

(i) $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = \infty$

(ii) $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = -\infty$

(iii) $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = c$, wobei c eine beliebig vorgegebene reelle Zahl ist.

(iv) Die Folge $(a_n b_n)$ ist beschränkt, aber nicht konvergent.

Aufgabe 4. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Für eine reelle Zahlenfolge (a_n) gilt: Falls (a_n) nach unten beschränkt ist ($a_n \geq C$ für ein $C \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}$), so gilt $\liminf a_n \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, andernfalls $\liminf a_n = -\infty$.

(b) Seien (a_n), (b_n) konvergente oder uneigentlich konvergente reelle Zahlenfolgen mit $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$ ($a, b \in \overline{\mathbb{R}}$). Dann gilt:

  (i) Falls $a + b$ definiert ist, dann konvergiert $(a_n + b_n)$ (evtl. uneigentlich) gegen $a + b$.

  (ii) Falls ab definiert ist, dann gilt $\lim(a_n b_n) = ab$.

Bonusaufgabe. (a) Zeigen Sie, daß für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n}\binom{n}{k} = 0.$$

(b) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Zeigen Sie, daß dann auch die Folge (b_n) mit

$$b_n := \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} a_k \quad \text{mit } n \in \mathbb{N}$$

gegen a konvergiert.

Bonusaufgabe. Sei (a_n) eine beschränkte reelle Folge. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(i) $\liminf a_n \leq \limsup a_n$.

(ii) $\liminf a_n$ und $\limsup a_n$ sind Häufungspunkte von (a_n).

(iii) Falls (a_n) konvergent ist, so gilt $\lim a_n = \liminf a_n = \limsup a_n$.

Abgabe: Mittwoch, 19.11.14
bis spätestens 18 Uhr in den Briefkästen
im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock).