WS 2014/2015

Prof. Hansjörg Geiges
Dipl.-Math. Christian Evers

Analysis I

Übungsblatt 8

Aufgabe 1. Zeigen Sie, daß die durch

$$f(x) = \begin{cases} x\sin(1/x) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

definierte Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auf $\mathbb{R}$ stetig ist. Sie dürfen verwenden, daß die Funktion $x \mapsto \sin x$ auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ist (dies wird später in der Vorlesung gezeigt).

Aufgabe 2. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Der Durchschnitt zweier folgenkompakter Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ ist folgenkompakt. Zeigen Sie dies auf zwei Weisen:

  (i) direkt aus der Definition von Folgenkompaktheit;

  (ii) mittels des Satzes von Bolzano–Weierstraß.

(b) Der Durchschnitt unendlich vieler folgenkompakter Mengen ist folgenkompakt.

(c) Die Vereinigung zweier folgenkompakter Mengen ist folgenkompakt.

(d) Ist die Vereinigung unendlich vieler folgenkompakter Mengen stets folgenkompakt?

(e) Geben Sie ein Beispiel von nicht-leeren abgeschlossenen Mengen $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots$ in $\mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, daß

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset.$$

(f) Für nicht-leere folgenkompakte Mengen $K_1 \supset K_2 \supset K_3 \supset \dots$ im $\mathbb{R}^n$ gilt stets

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} K_i \neq \emptyset.$$

Aufgabe 3. Die Funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ sei stetig, und es gelte $f(0) = f(1)$. Zeigen Sie, daß es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $x \in [0,1]$ mit $f(x) = f(x + 1/n)$ gibt. Was bedeutet diese Aussage geometrisch?

Hinweis: Wenden Sie den Zwischenwertsatz in geeigneter Weise auf die für $0 \leq x \leq 1 - 1/n$ durch $g(x) := f(x) - f(x + 1/n)$ definierte Funktion g an.

b.w.

Aufgabe 4. Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Untersuchen Sie, in welchen Punkten diese Funktion stetig bzw. unstetig ist.

Bonusaufgabe. Sei n eine natürliche Zahl größer als 1. Dann gibt es keine stetige Funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, die jeden ihrer Werte genau n-mal annimmt.

Hinweis: Zwischenwertsatz.

Knobelaufgabe. (a) Kann man auf kariertem Papier ein gleichseitiges Dreieck zeichnen, dessen drei Ecken Gitterpunkte des Karopapiers sind?

Hinweis: Was wäre der Flächeninhalt eines solchen Dreiecks?

(b) Sei n eine natürliche Zahl größer als 2. Angenommen, $A_1 \dots A_n$ ist ein regelmäßiges n-Eck (d.h. alle Seiten sind gleich lang), dessen Ecken Gitterpunkte sind. Wähle einen Gitterpunkt O. Sei OB_i, $i = 1, \dots, n$, die Strecke mit gleicher Richtung und Länge wie A_iA_{i+1}, wobei mit A_nA_{n+1} die Seite A_nA_1 gemeint ist. Zeigen Sie, daß $B_1 \dots B_n$ ein regelmäßiges n-Eck aus Gitterpunkten ist, und daß das Ähnlichkeitsverhältnis $|B_1B_2|/|A_1A_2|$ der beiden n-Ecke gleich $2\sin(\pi/n)$ ist. Folgern Sie, daß für $n > 6$ kein solches n-Eck $A_1 \dots A_n$ existieren kann. Was gilt für $n \in \{4, 5, 6\}$?

Abgabe: Mittwoch, 3.12.14
bis spätestens 18 Uhr in den Briefkästen
im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock).