WS 2014/2015

Prof. Hansjörg Geiges
Dipl.-Math. Christian Evers

Analysis I

Übungsblatt 10

Aufgabe 1. Die Funktion $f\colon\ \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ sei gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{falls } x^2 < 2, \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, daß f differenzierbar ist, und daß $f' \equiv 0$. Ist f konstant?

(b) Zeigen Sie, daß die durch $g(x) = x + f(x)$ definierte Funktion $g\colon\ \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ differenzierbar ist, und daß $g' \equiv 1$. Ist g streng monoton wachsend?

(c) Laut Korollar 6.11 der Vorlesung gilt für eine differenzierbare Funktion $h\colon\ I \to \mathbb{R}$ auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$: falls $h' \equiv 0$, so ist h konstant; falls $h' > 0$, so ist h streng monoton wachsend. Warum funktioniert der Beweis von Korollar 6.11 der Vorlesung für die obigen Beispiele nicht? Ist Korollar 6.11 etwa falsch?

Aufgabe 2. (a) Die Funktion $f\colon\ (a,b) \to \mathbb{R}$ sei an der Stelle $x_0 \in (a,b)$ differenzierbar. Zeigen Sie, daß dann in einer Umgebung von x_0 eine *Lipschitz-Bedingung*

$$|f(x) - f(x_0)| \leq L \cdot |x - x_0| \tag{$\star$}$$

mit einer geeigneten Konstanten L gilt, d.h. es gibt ein $\delta > 0$, so daß $I_\delta(x_0) \subset (a,b)$ und $(\star)$ gilt für alle $x \in I_\delta(x_0)$. Insbesondere, wie wir schon wissen, ergibt sich hieraus erneut die Stetigkeit von f in x_0.

(b) Sei f wie in (a). Zeigen Sie: Falls $f'(x_0) > 0$, so gilt

$$f(x_0 - h) < f(x_0) < f(x_0 + h)$$

für kleine positive h. Falls $f'(x_0) < 0$, so kehren sich die Ungleichungen um.

(c) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f\colon\ I \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Zeigen Sie, daß $f'(I)$ dann ein Intervall ist, d.h. falls $a, b \in I$ und γ zwischen $f'(a)$ und $f'(b)$ liegt, so gibt es ein $c \in [a,b]$ mit $f'(c) = \gamma$.

Hinweis: Betrachten Sie die Funktion g definiert durch $g(x) = f(x) - \gamma x$. Beachten Sie, daß f' eventuell nicht stetig ist.

Aufgabe 3. Untersuchen Sie die Funktion

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx, \quad x \in \mathbb{R},$$

auf lokale Extrema in Abhängigkeit von den Parametern $a, b \in \mathbb{R}$.

b.w.

Aufgabe 4. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Sei $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, deren Ableitung f' stetig in $x = 0$ ist, und für die $f'(0) > 0$ gilt. Dann ist f in einer Umgebung von 0 streng monoton wachsend.

(b) Die durch

$$f(x) = \begin{cases} x/2 + x^2 \sin(1/x) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

definierte Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist überall differenzierbar und es gilt $f'(0) > 0$.

(c) Die in (b) definierte Funktion f ist in keiner Umgebung von 0 monoton wachsend.

Bonusaufgabe. Für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sei

$$f(x) = \frac{\sqrt{1 + x^2} - 1}{x}.$$

Wählen Sie $f(0)$ so, daß $f \in C^0(\mathbb{R})$. Ist f in $x = 0$ dann differenzierbar? Gilt $f \in C^1(\mathbb{R})$?

Knobelaufgabe (Trost und Moral in der Mathematik)**.** Dem Göttinger Mathematiker Franz Rellich (1906–1955) wurde vorgeworfen, seine Analysis-Vorlesung sei anwendungsfern. Daraufhin stellte er folgende berühmte Aufgabe (siehe F. Wille, Humor in der Mathematik, S. 18). Wegen des politisch korrekten Zeitgeistes weise ich darauf hin, daß man den Studenten auch durch eine Studentin, und das Mädchen durch einen Knaben mit knackigen Waden ersetzen kann, zitiert wird aber die Originalversion:

> Ein Student geht auf der Weender Straße in Göttingen hinter einem Mädchen mit auffallend schönen Beinen her. Frage: In welcher Entfernung muß der Student hinter dem Mädchen hergehen, um die Beine, soweit sie unter dem Rock hervorschauen, unter dem größtmöglichen Blickwinkel zu sehen? Die Höhe des Rocksaumes über dem Erdboden sei dabei 60 cm, und die Augenhöhe des Studenten 178 cm.

Rellich pflegte hinzuzufügen: "Der Trost dabei ist, daß die gesuchte Entfernung nicht Unendlich ist, und die Moral, daß sie nicht Null ist."

Hinweis: Diese Aufgabe läßt sich als gewöhnliche Extremwertaufgabe lösen, indem man den Blickwinkel explizit als Funktion der fraglichen Höhen schreibt. Es gibt aber auch eine geometrische Lösung, die den Peripheriewinkelsatz verwendet: Die Sehne in einem Kreis erscheint von jedem Punkt auf einem der beiden Kreisbögen unter dem gleichen Blickwinkel.

Abgabe: Mittwoch, 17.12.14
bis spätestens 18 Uhr in den Briefkästen
im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock).