WS 2015/16

Prof. Hansjörg Geiges
Dipl.-Math. Christian Evers

Analysis III

Übungsblatt 6

Aufgabe 1. Skizzieren Sie die durch die Gleichung

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2xy = 0$$

im $\mathbb{R}^2$ definierte Kurve, wobei a ein reeller Parameter ist. Berechnen Sie den Flächeninhalt, der von der Kurve umschlossen wird.

Hinweis: Transformationsformel.

Aufgabe 2. (a) Die Funktionen $f, g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ seien wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= x^2 + xy - y - z, \\ g(x, y, z) &= 2x^2 + 3xy - 2y - 3z. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, daß

$$C := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon\ f(x, y, z) = g(x, y, z) = 0\}$$

eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist, und daß durch $t \mapsto (t, t^2, t^3)$, $t \in \mathbb{R}$, eine globale Karte von C gegeben ist.

(b) Zeigen Sie, daß weder das Achsenkreuz $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon\ xy = 0\}$ noch die **Neilsche Parabel** $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon\ x^3 = y^2\}$ eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$ ist.

Aufgabe 3. Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-k}$ eine differenzierbare Abbildung. Ein Wert $c \in \mathbb{R}^{n-k}$ heißt **regulär**, falls die Jacobische Matrix $J_f(a)$ in allen Punkten $a \in f^{-1}(c)$ den maximalen Rang $n-k$ hat, mit anderen Worten, wenn das Differential d_af surjektiv ist für alle $a \in f^{-1}(c)$. Unter dieser Bedingung ist $f^{-1}(c)$, sofern dieses Urbild von c nicht die leere Menge ist, eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$.

Durch Betrachtung der Abbildung $f\colon \mathcal{M} \to \mathcal{S}$, $A \mapsto A^{\mathrm{t}}A$, wobei $\mathcal{M} \cong \mathbb{R}^{n^2}$ der Vektorraum der $(n \times n)$-Matrizen und $\mathcal{S} \cong \mathbb{R}^{n(n+1)/2}$ der Vektorraum der symmetrischen $(n \times n)$-Matrizen ist, hatten wir auf Übungsblatt 4 der Analysis II gezeigt, daß die orthogonale Gruppe $\mathrm{O}(n) = f^{-1}(E)$, wobei E die $(n \times n)$-Einheitsmatrix bezeichnet, eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n^2}$ der Dimension $n(n-1)/2$ ist.

Die für die spezielle Relativitätstheorie bedeutsame Lorentz-Gruppe $\mathrm{O}(3, 1)$ ist die Gruppe der reellen (4×4)-Matrizen A, die der Gleichung $A^{\mathrm{t}}DA = D$ genügen, wobei D die Diagonalmatrix mit Diagonaleinträgen $(1, 1, 1, -1)$ ist. Zeigen Sie analog zur Diskussion der orthogonalen Gruppe, daß $\mathrm{O}(3, 1)$ eine 6-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{4\times 4}$ ist. Bestimmen Sie dazu zunächst das Differential d_Af der Abbildung $f\colon \mathcal{M} \to \mathcal{S}$, $A \mapsto A^{\mathrm{t}}DA$, mit $\mathcal{M}$ und $\mathcal{S}$ wie oben, jetzt für $n = 4$. Begründen Sie dann, warum das Differential d_Af für $A \in \mathrm{O}(3, 1)$ surjektiv ist.

b.w.

Die Matrixmultiplikation gibt sowohl $\mathrm{O}(n)$ als auch $\mathrm{O}(3,1)$ eine Gruppenstruktur. Man kann auch zeigen, daß die Gruppenoperationen (Multiplikation und Inversenbildung) differenzierbare Abbildungen sind. Eine (differenzierbare) Mannigfaltigkeit, die gleichzeitig eine Gruppenstruktur mit dieser Differenzierbarkeitseigenschaft besitzt, nennt man *Liesche Gruppe* (nach Sophus Lie, 1842–1899).

Aufgabe 4. Sei $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$f(x,y,u,v) = (z\bar{w} + \bar{z}w, \mathrm{i}(\bar{z}w - z\bar{w}), |z|^2 - |w|^2);$$

dabei schreiben wir $z = x + \mathrm{i}y$ und $w = u + \mathrm{i}v$ als komplexe Variablen. Zeigen Sie:

(a) Für jeden Punkt $p \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ ist das Urbild $f^{-1}(p)$ eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^4$.

(b) Die Einschränkung $f|_{S^3}$ bildet S^3 surjektiv auf S^2 ab, und für $p \in S^2$ gilt $f^{-1}(p) \subset S^3$.

(c) Die Untermannigfaltigkeit $f^{-1}(p)$ ist diffeomorph zum Einheitskreis $S^1 \subset \mathbb{R}^2$, d.h. es gibt eine bijektive differenzierbare Abbildung $f^{-1}(p) \to S^1$ mit differenzierbarer Umkehrabbildung.

Diese Abbildung $f|_{S^3}\colon S^3 \to S^2$, bei der jedes Urbild $f^{-1}(p)$ (man sagt auch: jede **Faser**) diffeomorph zu S^1 ist, wurde von Heinz Hopf gefunden und heißt heute **Hopf-Faserung**. Sie spielt eine wichtige Rolle in der Algebraischen Topologie, aber auch z.B. bei der Beschreibung magnetischer Monopole in der Elektrodynamik.

Bonusaufgabe. Zeigen Sie die Umkehrung der Sätze 4.2 und 4.3 aus der Vorlesung, d.h. eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$, die 'lokal so aussieht wie $\mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^n$' oder 'lokale Karten besitzt' — wobei die präzise Bedeutung dieser Eigenschaften in den genannten Sätzen beschrieben ist —, ist eine Untermannigfaltigkeit.

Abgabe: Mittwoch, 9.12.15
bis spätestens 18 Uhr in den Briefkästen
im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock).