Prof. Hansjörg Geiges
Dipl.-Math. Christian Evers

Analysis III

Übungsblatt 7

Aufgabe 1. Seien reelle Zahlen $0 < a < b < c$ gegeben. Sei ferner für jede reelle Zahl $t \neq a, b, c$ die Funktion $q_t \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$q_t(x,y,z) = \frac{x^2}{a-t} + \frac{y^2}{b-t} + \frac{z^2}{c-t}.$$

Zeigen Sie:

(a) Die durch

$$Q(t) := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon\ q_t(x,y,z) = 1\}$$

definierte sogenannte **Quadrik** (d.h. Lösung einer quadratischen Gleichung) ist eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$.

(b) Skizzieren Sie diese Untermannigfaltigkeit für die drei Fälle $t < a$, $a < t < b$, $b < t < c$. Die entsprechenden Untermannigfaltigkeiten heißen **Ellipsoid**, **einschaliges Hyperboloid**, bzw. **zweischaliges Hyperboloid**.

(c) Sei $p = (x_0, y_0, z_0)$ ein Punkt mit $x_0 y_0 z_0 \neq 0$. Dann hat die Gleichung $q_t(p) = 1$ genau eine Lösung $t_1 < a$, genau eine Lösung t_2 im Intervall (a,b), und genau eine Lösung t_3 im Intervall (b,c). Mit anderen Worten, durch p geht jeweils genau eine Fläche von einem der drei beschriebenen Typen.

(d) Die Normalenvektoren an $Q(t_1)$, $Q(t_2)$ und $Q(t_3)$ im Punkt p stehen paarweise senkrecht aufeinander.

(e) Die Zuordnung $p \mapsto (t_1, t_2, t_3)$ bildet den ersten Oktanten $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ diffeomorph auf $(-\infty, a) \times (a,b) \times (b,c)$ ab.

Aufgabe 2. Berechnen Sie den Flächeninhalt des Kegels

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon\ x^2 + y^2 = z^2,\ x^2 + y^2 \leq 1,\ z \geq 0\}$$

mittels jeder der folgenden Methoden:

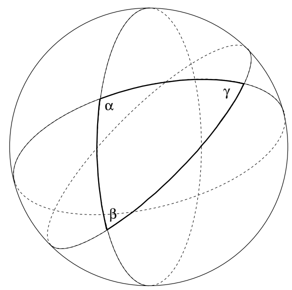
(i) Flächeninhaltsformel aus der Vorlesung, mit der Parametrisierung $(x,y) \mapsto (x, y, \sqrt{x^2+y^2})$.

(ii) Wie (i), aber mit der Parametrisierung $(r, \varphi) \mapsto (r\cos\varphi, r\sin\varphi, r)$.

(iii) 'Aufschneiden' des Kegels entlang $\{x = z \in [0,1],\ y = 0\}$ und 'Ausrollen' in der Ebene; dann elementargeometrische Überlegung.

b.w.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, daß ein von drei Großkreisen auf S^2 berandetes sphärisches Dreieck mit den Winkeln α, β, γ den Flächeninhalt $\alpha + \beta + \gamma - \pi$ hat. Diese Zahl heißt der **sphärische Exzeß** des Dreiecks.



Hinweis: Wie groß ist der Flächeninhalt zwischen zwei Großkreisen? Der Flächeninhalt des Dreiecks ergibt sich dann aus einer elementargeometrischen Überlegung.

Aufgabe 4. Sei Ω der im ersten Quadranten liegende Teil der Einheitskreisscheibe. Berechnen Sie

$$\int_\Omega xy \, dx \, dy$$

auf beide der folgenden Weisen:

(i) Direkt, indem Sie Ω parametrisieren als

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon \; 0 \leq y \leq 1, \; 0 \leq x \leq \sqrt{1 - y^2}\},$$

und das Integral als iteriertes Integral

$$\int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-y^2}} xy \, dx \right) dy$$

interpretieren.

(ii) Durch Transformation auf Polarkoordinaten und Verwendung der Transformationsformel.

Abgabe: Mittwoch, 16.12.15
bis spätestens 18 Uhr in den Briefkästen
im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock).