WS 2015/16 Prof. Hansjörg Geiges
Dipl.-Math. Christian Evers

Analysis III

Übungsblatt 8

Aufgabe 1. Auf $\mathbb{R}^3$ seien die 1-Formen

$$\begin{aligned}\omega_1 &= (x^2 - yz)\,dx + (y^2 - xz)\,dy - xy\,dz \\ \omega_2 &= \omega_1 + 2xy\,dz\end{aligned}$$

gegeben. Welche der Formen ist geschlossen? Welche der Formen ist exakt? Berechnen Sie die Integrale von ω_1 bzw. ω_2 entlang der Kurve

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t, ct)$$

mit $t \in [0, 2\pi]$ und $c \in \mathbb{R}$ eine Konstante.

Aufgabe 2. Es sei $\mathbf{v}$ ein konservatives Vektorfeld auf der offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$, d.h. es gebe eine Funktion $\Phi \in C^1(U)$, so daß $\mathbf{v}(p) = -\operatorname{grad} \Phi(p) \in T_pU$ für jedes $p \in U$.

Weiter sei $\gamma \in C^2([a,b], U)$ eine Kurve in U, die dem Newtonschen Bewegungsgesetz

$$\ddot{\gamma}(t) = \mathbf{v}(\gamma(t)), \quad t \in [a,b],$$

genügt. Man beweise den Energiesatz

$$\frac{1}{2}\|\dot{\gamma}(t)\|^2 + \Phi((\gamma(t)) \equiv \text{konst.}$$

Hinweis: Betrachten Sie $\Phi(\gamma(t_2)) - \Phi(\gamma(t_1))$ für $t_1, t_2 \in [a,b]$.

Aufgabe 3. Auf dem $\mathbb{R}^3$ betrachte man die 2-Form

$$\omega = 2xz\,dy \wedge dz + dz \wedge dx - (z^2 + e^x)\,dx \wedge dy.$$

Zeigen Sie, daß $d\omega = 0$ gilt, und bestimmen Sie eine stetig differenzierbare 1-Form η auf dem $\mathbb{R}^3$ mit $\omega = d\eta$.

Aufgabe 4. Es sei $\omega = p(x,y)\,dx + q(x,y)\,dy$ eine stetige differenzierbare geschlossene 1-Form auf einem offenen Rechteck $U \subset \mathbb{R}^2$, d.h. es gelte $\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$. Zeigen Sie, daß ω exakt ist, indem Sie nachweisen, daß für jeden beliebigen Punkt $(a,b) \in U$ die Funktion

$$f(x,y) := \int_a^x p(t,b)\,dt + \int_b^y q(x,t)\,dt$$

eine Stammfunktion von ω ist.

b.w.

Bonusaufgabe. Sei V ein endlich-dimensionaler reeller Vektorraum. Zeigen Sie:

(a) Die 1-Formen $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in V^*$ sind linear unabhängig genau dann, wenn $\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_r \neq 0$.

(b) Eine k-Form $\omega \in \Lambda^k V^*$ heißt **zerlegbar**, falls $\omega = \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k$ für geeignete $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in V^*$.

  (i) Für $\dim V \leq 3$ ist jede 2-Form zerlegbar.

  (ii) Sind $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in V^*$ linear unabhängig, so ist $\alpha_1 \wedge \alpha_2 + \alpha_3 \wedge \alpha_4$ nicht zerlegbar.

Bonusaufgabe. In dieser Aufgabe sollen einige Formeln der dreidimensionalen Vektoranalysis (vergl. Analysis II, Übungsblatt 4) mit Hilfe des Differentialformenkalküls hergeleitet werden.

Wir schreiben formal

$$\begin{aligned} d\mathbf{s} &:= (dx_1, dx_2, dx_3), \\ d\mathbf{F} &:= (dx_2 \wedge dx_3, dx_3 \wedge dx_1, dx_1 \wedge dx_2), \\ dV &:= dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3. \end{aligned}$$

Für $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ setzen wir

$$\begin{aligned} \mathbf{v}\, d\mathbf{s} &:= v_1\, dx_1 + v_2\, dx_2 + v_3\, dx_3, \\ \mathbf{v}\, d\mathbf{F} &:= v_1\, dx_2 \wedge dx_3 + v_2\, dx_3 \wedge dx_1 + v_3\, dx_1 \wedge dx_2. \end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie für $f \in C^1(\mathbb{R}^3)$ und $\mathbf{v}$ ein C^1-Vektorfeld auf $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} df &= \operatorname{grad} f\, d\mathbf{s}, \\ d(\mathbf{v}\, d\mathbf{s}) &= \operatorname{rot} \mathbf{v}\, d\mathbf{F}, \\ d(\mathbf{v}\, d\mathbf{F}) &= \operatorname{div} \mathbf{v}\, dV. \end{aligned}$$

(b) Folgern Sie aus $d(d\omega) = 0$ für jede C^2 k-Form ω, daß

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) &= 0, \\ \operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{v}) &= 0 \end{aligned}$$

für $f \in C^2(\mathbb{R}^3)$ und $\mathbf{v}$ ein C^2-Vektorfeld auf $\mathbb{R}^3$.

Bonusaufgabe. Beweisen Sie die folgenden Produktregeln für differenzierbare Funktionen f und differenzierbare Vektorfelder $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ auf dem $\mathbb{R}^3$, indem Sie die entsprechenden Formeln für Differentialformen herleiten.

(i) $\operatorname{div}(f\mathbf{v}) = f \operatorname{div} \mathbf{v} + \langle \operatorname{grad} f, \mathbf{v} \rangle$,

(ii) $\operatorname{rot}(f\mathbf{v}) = f \operatorname{rot} \mathbf{v} + \operatorname{grad} f \times \mathbf{v}$,

(iii) $\operatorname{div}(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \langle \operatorname{rot} \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle - \langle \mathbf{v}, \operatorname{rot} \mathbf{w} \rangle$.

Abgabe: **Donnerstag**, 7.1.16
bis spätestens **12 Uhr** in den Briefkästen
im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock).