Prof. Hansjörg Geiges
Dipl.-Math. Christian Evers

Analysis III

Übungsblatt 12

Aufgabe 1. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte n-dimensionale Untermannigfaltigkeit mit Rand ∂M. Es bezeichne $\mathbf{n}$ den äußeren Einheitsnormalenvektor längs ∂M. Seien f, g in einer Umgebung von M zweimal stetig differenzierbare Funktionen. Zeigen Sie die folgenden Identitäten, wobei $\triangle = \sum_i \partial^2/\partial x_i^2$ der Laplace-Operator ist:

$$\int_M f \triangle g \, dx + \int_M \langle \nabla f, \nabla g \rangle \, dx = \int_{\partial M} f \langle \nabla g, \mathbf{n} \rangle \, dS(x),$$

$$\int_M (f \triangle g - g \triangle f) \, dx = \int_{\partial M} \big(f \langle \nabla g, \mathbf{n} \rangle - g \langle \nabla f, \mathbf{n} \rangle \big) \, dS(x).$$

Aufgabe 2. (a) Aus dem Zwischenwertsatz für reellwertige Funktionen folgt insbesondere der Nullstellensatz: Jede stetige reellwertige Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$ besitzt im Intervall (a,b) eine Nullstelle. Zeigen Sie die folgende Verallgemeinerung dieses Nullstellensatzes: Jedes stetige Vektorfeld $\mathbf{v}$ auf dem Einheitsball D^n, das der Bedingung $\mathbf{v}(\mathbf{x})/|\mathbf{v}(\mathbf{x})| = \mathbf{x}$ für $\mathbf{x} \in \partial D^n = S^{n-1}$ genügt, besitzt eine Nullstelle in D^n. Hierbei darf die Gültigkeit des Brouwerschen Fixpunktsatzes für stetige Abbildungen $D^n \to D^n$ vorausgesetzt werden.

(b) Hier soll eine Verallgemeinerung dieses Nullstellensatzes bewiesen werden: Jedes stetige Vektorfeld $\mathbf{v}$ auf D^n, das in den Randpunkten $\mathbf{x} \in \partial D^n$ der Bedingung $\langle \mathbf{x}, \mathbf{v}(\mathbf{x}) \rangle > 0$ genügt, besitzt eine Nullstelle in D^n. Betrachten Sie dazu die Abbildung

$$f(\mathbf{x}) := \begin{cases} -\mathbf{v}(2\mathbf{x}) & \text{für } |\mathbf{x}| \le 1/2, \\ \big(2 - \frac{1}{|\mathbf{x}|}\big)\mathbf{x} + 2(|\mathbf{x}| - 1)\mathbf{v}\big(\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}\big) & \text{für } 1/2 \le |\mathbf{x}| \le 1, \end{cases}$$

und zeigen Sie, daß $f/|f|$ eine stetige Retraktion von D^n auf ∂D^n wäre, falls $\mathbf{v}$ keine Nullstelle hätte.

Aufgabe 3. Es sei $t \mapsto (x(t), z(t))$, $t \in [a,b]$, eine injektive C^1-Abbildung mit $x(t) > 0$ bis auf endlich viele $t \in [a,b]$. Bei der Rotation dieser Kurve um die z-Achse im Raum entsteht eine Rotationsfläche, die sich parametrisieren läßt durch

$$\Phi(t,\theta) = \big(x(t)\cos\theta, x(t)\sin\theta, z(t)\big), \quad t \in [a,b], \ \theta \in [0, 2\pi].$$

(a) Berechnen Sie das Flächenelement für diese Parametrisierung, und geben Sie damit eine Formel für den Flächeninhalt der Rotationsfläche an.

(b) Der Schwerpunkt einer Kurve $t \mapsto \gamma(t)$ im $\mathbb{R}^n$ mit konstanter 'Dichte' berechnet sich durch

$$\frac{\int_\gamma \mathbf{x}\, ds(\mathbf{x})}{\int_\gamma ds(\mathbf{x})}.$$

Sei L die Länge der Kurve aus (a) und r der Abstand ihres Schwerpunktes von der z-Achse. Zeigen Sie, daß der Flächeninhalt A der Rotationsfläche der Beziehung

$$A = 2\pi r L$$

genügt.

Aufgabe 4. Zeigen Sie die folgende Verallgemeinerung des Brouwerschen Fixpunktsatzes: Jede stetige Abbildung $f\colon D^n \to \mathbb{R}^n$ mit $f(\partial D^n) \subset D^n$ besitzt einen Fixpunkt.

Hinweis: Man kann hierzu das Argument für die klassische Fassung des Brouwerschen Fixpunktsatzes anpassen; alternativ kann man Aufgabe 2 verwenden.

Bonusaufgabe. Zeigen Sie, daß man eine fixpunktfreie stetige Abbildung $f\colon D^n \to D^n$ durch eine fixpunktfreie C^∞-Abbildung $g\colon D^n \to D^n$ approximieren kann. Dabei dürfen Sie verwenden, daß es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine C^∞-Abbildung $h\colon D^n \to \mathbb{R}^n$ mit $|f(\mathbf{x}) - h(\mathbf{x})| < \varepsilon$ für alle $\mathbf{x} \in D^n$ gibt (Weierstraßscher Approximationssatz).

Damit gilt der Brouwersche Fixpunktsatz auch für stetige Abbildungen $D^n \to D^n$.

Bonusaufgabe. Leiten Sie eine Beziehung wie in Aufgabe 3 (b) her für das Volumen des entstehenden Rotationskörpers, den Flächeninhalt zwischen der Rotationsachse und der gegebenen Kurve in der (x, z)-Ebene, und den Abstand des Schwerpunktes dieser Fläche von der Rotationsachse.

Abgabe: Mittwoch, 3.2.16
bis spätestens 18 Uhr in den Briefkästen
im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock).
Die Lösungen werden in der Vorlesung
am 11.2. besprochen.