WS 2016/2017

Prof. Hansjörg Geiges
Dipl.-Math. Christian Evers

Elementare Differentialgeometrie

Übungsblatt 2

Aufgabe 1. Eine **Helix** war definiert als reguläre Kurve $\boldsymbol{\alpha}$ im $\mathbb{R}^3$, für die ein $\mathbf{0} \neq \mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ existiert mit $\langle \mathbf{T}, \mathbf{u} \rangle = \text{konst}$. Eine **Kreis-Helix** ist eine Helix, deren Projektion auf eine Ebene orthogonal zu $\mathbf{u}$ ein Kreis ist.
Zeigen Sie: $\boldsymbol{\alpha}$ ist eine Kreis-Helix genau dann, wenn $\tau = \text{konst.} \neq 0$ und $k = \text{konst.} > 0$ gilt.

Aufgabe 2. Sei $\boldsymbol{\alpha}$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Raumkurve mit $k \neq 0$. Finden Sie eine vektorwertige Funktion $\mathbf{w}$, so daß

$$\begin{aligned} \mathbf{T}' &= \mathbf{w} \times \mathbf{T}, \\ \mathbf{N}' &= \mathbf{w} \times \mathbf{N}, \\ \mathbf{B}' &= \mathbf{w} \times \mathbf{B}. \end{aligned}$$

Bemerkung. $\mathbf{w}$ heißt **Darboux-Vektor**. Jean Gaston Darboux $(1842 - 1917)$ untersuchte Kurven unter einem kinematischen Gesichtspunkt. Wenn ein starrer Körper mit Einheitsgeschwindigkeit entlang einer Kurve läuft, so beschreibt $\mathbf{T}$ die infinitesimale Translation des Körpers und $\mathbf{w}$ die infinitesimale Rotation.

Aufgabe 3. Sei $\boldsymbol{\alpha}$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Raumkurve mit $k \neq 0$. Die von $\mathbf{T}(s)$ und $\mathbf{N}(s)$ aufgespannte Ebene durch $\boldsymbol{\alpha}(s)$ heißt die **Schmiegebene** von $\boldsymbol{\alpha}$ in $\boldsymbol{\alpha}(s)$. Zeigen Sie, daß $\boldsymbol{\alpha}$ genau dann in einer Ebene liegt, wenn es einen Punkt $\mathbf{x}_0$ in $\mathbb{R}^3$ gibt, so daß jede Schmiegebene durch $\mathbf{x}_0$ geht.

Aufgabe 4. Sei $\boldsymbol{\alpha}$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve mit $k(s) \neq 0$, $k'(s) \neq 0$ und $\tau(s) \neq 0$ für alle s. Zeigen Sie, daß die Spur von $\boldsymbol{\alpha}$ genau dann auf einer Sphäre liegt, wenn $\rho^2 + (\rho'\sigma)^2 = \text{konst} > 0$, wobei $\rho := 1/k$ und $\sigma := 1/\tau$.

Hinweis. Für die Hin-Richtung, drücke $\boldsymbol{\alpha}(s) - \mathbf{m}$ als Linearkombination von $\mathbf{N}(s)$ und $\mathbf{B}(s)$ aus, wobei $\mathbf{m}$ den Mittelpunkt der Sphäre bezeichnet. Dies liefert dann auch den gewünschten Ansatz für die Rück-Richtung.

Abgabe: Mittwoch, 2.11.16
bis spätestens 16:00 Uhr in den Briefkästen
im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock).