WS 2016/2017

Prof. Hansjörg Geiges
Dipl.-Math. Christian Evers

Elementare Differentialgeometrie

Übungsblatt 9

Aufgabe 1. Zeigen Sie, daß in einer isothermen Parametrisierung mit metrischen Koeffizienten

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 0 \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix},$$

wobei $\lambda = \lambda(u^1, u^2) > 0$, folgende Formel für die Gauß-Krümmung K gilt:

$$K = \frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}{\lambda^4} - \frac{\lambda_{11} + \lambda_{22}}{\lambda^3}.$$

Aufgabe 2. Parametrisieren Sie die Fläche

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon\ x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$$

als Rotationsfläche. Berechnen Sie die Gaußkrümmung dieser Fläche und beobachten Sie, daß diese überall negativ ist.

Aufgabe 3. Betrachten Sie die Poincaré-Scheibe, d.h. $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \colon\ u^2 + v^2 < 1\}$ mit der Metrik

$$(g_{ij}(u, v)) = \begin{pmatrix} 4/(1-u^2-v^2)^2 & 0 \\ 0 & 4/(1-u^2-v^2)^2 \end{pmatrix}.$$

Dies ist wie in Aufgabe 4 von Übungsblatt 6 ein Beispiel für eine abstrakt definierte Fläche, d.h. es gibt keine Fläche $\mathbf{x} \colon U \to \mathbb{R}^3$, so daß $g_{ij} = \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \rangle$ die erste Fundamentalform ist. Wir nennen die so definierte Metrik die **hyperbolische Metrik** auf U.

(a) Bestimmen Sie Christoffelsymbole und Gaußkrümmung.

(b) Zeigen Sie, daß Durchmesser von U und Kreisbögen, die den Einheitskreis $u^2 + v^2 = 1$ orthogonal schneiden, Geodätische sind, und daß jede Geodätische von dieser Form ist.

Aufgabe 4. Wir fassen die obere Halbebene $\mathbb{R}^2_+$ aus Aufgabe 4 von Blatt 6 und die Poincaré-Scheibe U aus der vorigen Aufgabe als Teilmengen von $\mathbb{C}$ auf. Zeigen Sie, daß durch

$$\varphi(z) = \frac{z - \mathrm{i}}{z + \mathrm{i}}$$

ein Diffeomorphismus $\mathbb{R}^2_+ \to U$ definiert wird, der bezüglich der jeweiligen hyperbolischen Metrik eine Isometrie ist.

Abgabe: Mittwoch, 21.12.16
bis spätestens 16:00 Uhr in den Briefkästen
im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock).