WS 2016/2017

Prof. Hansjörg Geiges
Dipl.-Math. Christian Evers

Elementare Differentialgeometrie

Übungsblatt 13

Aufgabe 1. Betrachte eine Familie von Geraden b_t, $t \in I$, in $\mathbb{R}^2$, gegeben durch eine parametrische Familie von Gleichungen

$$a_0(t) + a_1(t)\xi + a_2(t)\eta = 0,$$

wobei $a_1^2(t) + a_2^2(t) \neq 0$ für alle $t \in I$. Eine **Einhüllende** dieser Familie von Geraden ist eine C^1-Kurve $t \mapsto \boldsymbol{\beta}(t)$ mit der Eigenschaft, daß b_t die Tangente an $\boldsymbol{\beta}$ in $\boldsymbol{\beta}(t)$ ist für jedes $t \in I$. Wenn wir $\boldsymbol{\beta}(t) = (\xi(t), \eta(t))$ schreiben, übersetzt sich dies in die Bedingung

$$\left.\begin{array}{rcl} a_0(t) + a_1(t)\xi(t) + a_2(t)\eta(t) & = & 0 \\ a_1(t)\dot{\xi}(t) + a_2(t)\dot{\eta}(t) & = & 0. \end{array}\right\}$$

(a) Zeigen Sie, daß unter der Annahme, daß die Koeffizientenfunktionen a_i von der Klasse C^1 sind, dieses System äquivalent ist zu

$$\left.\begin{array}{rcl} a_0 + a_1\xi + a_2\eta & = & 0 \\ \dot{a}_0 + \dot{a}_1\xi + \dot{a}_2\eta & = & 0. \end{array}\right\}$$

(b) Folgern Sie, daß die Einhüllende existiert und eindeutig bestimmt ist, falls $a_1\dot{a}_2 - a_2\dot{a}_1$ keine Nullstellen hat.

(c) Sei $t \mapsto \boldsymbol{\alpha}(t) = (x(t), y(t))$, $t \in I$, eine ebene C^1-Kurve mit nirgends verschwindendem Drehimpuls. Zeigen Sie, daß die Polare b_t des Punktes $\boldsymbol{\alpha}(t)$ die Gerade

$$-1 + x(t)\xi + y(t)\eta = 0$$

ist.

(d) Berechnen Sie die Einhüllende dieser Familie von Polaren und beobachten Sie, daß diese mit der polaren Reziproken $\boldsymbol{\alpha}^*$ von $\boldsymbol{\alpha}$ zusammenfällt. Dies manifestiert noch einmal die Dualität aus Lemma 7.1.

(e) Zeigen Sie, daß eine ebene C^2-Kurve mit nirgends verschwindender Krümmung die eindeutige Einhüllende ihrer Familie von Tangenten ist.

Aufgabe 2. In dieser Aufgabe soll ein analytischer Beweis von Satz 7.4 gegeben werden.

Betrachte einen parametrisierten Kegelschnitt der Form

$$\mathbf{r}(t) = \frac{c^2/\mu}{1 + e\cos f(t)} \big(\cos f(t), \sin f(t)\big) =: \big(x(t), y(t)\big)$$

mit

$$\dot{f} = \frac{c}{r^2} = \frac{\mu^2}{c^3}\,(1 + e\cos f)^2$$

wie im Keplerproblem. Dann ist der Drehimpuls konstant und gleich c. Zeigen Sie, daß

$$\dot{x} = -\frac{\mu}{c}\sin f, \quad \dot{y} = \frac{\mu}{c}\,(e + \cos f).$$

Dies bedeutet, daß die polare Reziproke $\mathbf{r}^*$ von $\mathbf{r}$ gegeben ist durch

$$\mathbf{r}^*(t) = \frac{\mu}{c^2}\big(e + \cos f(t), \sin f(t)\big),$$

also auf einem Kreis vom Radius μ/c^2 um $(e\mu/c^2, 0)$ liegt. Beachten Sie, daß der Ursprung innerhalb des Kreises liegt für $e < 1$, auf dem Kreis für $e = 1$, und außerhalb des Kreises für $e > 1$.

Aufgabe 3. In dieser Aufgabe soll der Satz von Hamilton gezeigt werden, daß sich das Newtonsche Kraftgesetz charakterisieren läßt durch die Kreisförmigkeit der Geschwindigkeitskurve. Sei also $t \mapsto \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ eine Lösung des Zentralkraftproblems $\ddot{\mathbf{r}} = -f(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{r}/r$. Berechnen Sie die Krümmung der Geschwindigkeitskurve $t \mapsto (X(t), Y(t)) := (\dot{x}(t), \dot{y}(t))$ und beobachten Sie, daß diese Krümmung genau dann konstant ist, wenn $f \propto r^{-2}$.

Aufgabe 4. Betrachte $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ mit der vom $\mathbb{R}^3$ induzierten Riemannschen Metrik (d.h. der ersten Fundamentalform). Sei $\Psi\colon\ S^2 \setminus \{(0,0,1)\} \to \mathbb{R}^2$ die stereographische Projektion vom Nordpol aus auf die Äquatorebene. Zeigen Sie, daß durch

$$\frac{4\langle\,.\,,\,.\,\rangle}{(1+v^2)^2}$$

die Metrik auf $\mathbb{R}^2$ beschrieben wird, bezüglich der Ψ eine Isometrie ist. Hierbei bezeichnet $\langle\,.\,,\,.\,\rangle$ das gewöhnliche Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$, und v bezeichnet die Länge von $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$.

Abgabe: Mittwoch, 1.2.17
bis spätestens 16:00 Uhr in den Briefkästen
im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock).