Prof. Hansjörg Geiges
Dr. Sebastian Durst

Analysis I

Übungsblatt 3

Präsenzaufgabe. Beschreiben Sie alle Gruppen mit einem, zwei, drei bzw. vier Elementen (z.B. durch eine Verknüpfungstafel). Gibt es Körper mit einem, zwei, drei oder vier Elementen?

Hausaufgabe 1. Für $x, y \in \mathbb{R}^+$ seien

$$A(x,y) := \frac{1}{2}(x+y) \qquad G(x,y) := \sqrt{xy} \qquad H(x,y) := \frac{2}{x^{-1}+y^{-1}}$$

das sogenannte arithmetische, geometrische bzw. harmonische Mittel von x und y.

(a) Man zeige aus den Anordnungsaxiomen: $H(x,y) \leq G(x,y) \leq A(x,y)$.

(b) Wenn man zunächst eine Wegstrecke s mit der Geschwindigkeit x zurücklegt, und dann nochmals eine Strecke s mit der Geschwindigkeit y, welches der obigen Mittel beschreibt dann die Durchschnittsgeschwindigkeit auf der Gesamtstrecke?

Hausaufgabe 2. Leiten Sie aus den Körperaxiomen von $\mathbb{R}$ die folgenden Regeln für das Bruchrechnen her, wobei $\frac{a}{b} := ab^{-1}$ für $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$. Geben Sie bei jedem Schritt das verwendete Axiom an.

(i)

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff ad = bc \quad (b, d \neq 0)$$

(ii)

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd} \quad (b, d \neq 0)$$

(iii)

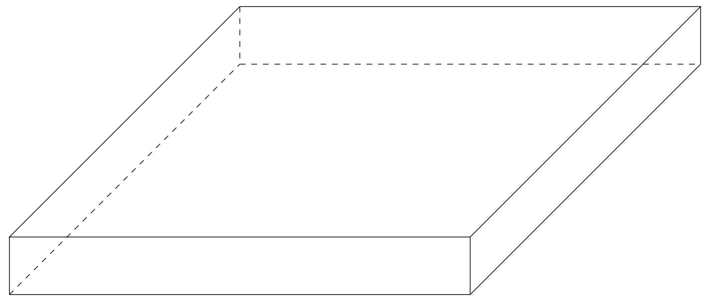
$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \quad (b, d \neq 0)$$

(iv)

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc} \quad (b, c, d \neq 0)$$

b.w.

Hausaufgabe 3. Betrachten Sie eine quadratische Platte.



Es gibt Drehungen um geeignete Drehachsen im dreidimensionalen Raum $\mathbb{R}^3$, die diese Platte auf sich selbst abbilden (einschließlich der identischen Abbildung, die den ganzen $\mathbb{R}^3$ fest läßt). Beschreiben Sie diese Drehsymmetrien.

Zeigen Sie, daß diese Drehungen eine Gruppe bilden, und daß man zwei Elemente a, b der Gruppe derart auswählen kann, daß jedes Element dieser Gruppe als Verknüpfung dieser Elemente geschrieben werden kann. Mit Verknüpfung sind hier beliebige endliche Produkte von a, b und ihren Inversen gemeint, also z.B. $a^2ba^{-3}b^2$. (Man sagt: Die Gruppe wird von diesen beiden Elementen erzeugt.) Beachten Sie, daß das neutrale Element e der Gruppe hierbei als die "leere" Verknüpfung der beiden Erzeuger interpretiert wird. Ist diese Gruppe abelsch?

Bonusaufgabe. Leiten Sie aus den Axiomen der Multiplikation in $\mathbb{R}$ die folgenden schon in der Vorlesung genannten Aussagen her:

1. Das Einselement 1 ist eindeutig bestimmt.
2. Zu gegebenem $a \in \mathbb{R}^*$ ist das inverse Element a^{-1} eindeutig bestimmt.
3. Für jedes $a \in \mathbb{R}^*$ und jedes $b \in \mathbb{R}$ hat die Gleichung $ax = b$ die eindeutige Lösung $x = a^{-1}b$.
4. Für jedes $a \in \mathbb{R}^*$ gilt $(a^{-1})^{-1} = a$.
5. Für alle $a, b \in \mathbb{R}^*$ gilt $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$.
6. $1^{-1} = 1$.
9. $a \cdot (-b) = -(ab) = (-a) \cdot b$.

Geben Sie bei jedem Beweisschritt an, welches Axiom Sie verwenden.

Knobelaufgabe. Zwei ältere Damen verlassen ihr jeweiliges Heimatdorf bei Sonnenaufgang und gehen in Richtung des Dorfes der anderen. Beide gehen mit konstanter Geschwindigkeit. Um 12 Uhr mittags begegnen sie sich und gehen ohne anzuhalten aneinander vorbei. Die eine Dame erreicht das Dorf der anderen um 16 Uhr, die andere das der ersten um 21 Uhr. Wann ging an diesem Tag die Sonne auf?

Hinweis: Das intellektuelle Vergnügen bei dieser elementaren Aufgabe besteht darin, einen Ansatz zu finden, der sich sofort im Kopf durchrechnen läßt.

Abgabe der Haus- und Bonusaufgaben: Montag, 29.10.18
bis spätestens 18 Uhr in den Briefkästen
im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock).
Geben Sie bitte unbedingt die Nummer Ihrer Übungsgruppe an, andernfalls können Ihre Lösungen nicht bewertet werden!