Prof. Hansjörg Geiges
Dr. Sebastian Durst

Analysis I

Übungsblatt 7

Präsenzaufgabe. Zeigen Sie sowohl mittels des ε-δ-Kriteriums als auch mittels des Folgenkriteriums:

(a) Die Funktion
$$f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{1}{x^2}$$
ist stetig.

(b) Die Funktion $g\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = 0$ für $|x| < \sqrt{2}$ und $g(x) = 1$ für $|x| > \sqrt{2}$ ist stetig. Wie sieht der Graph dieser Funktion aus?

Hausaufgabe 1. (a) Geben Sie ein Beispiel einer Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die nur an den Stellen $x_0 \in \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ stetig ist.

(b) Definieren Sie eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wie folgt:
$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q};\\ 1, & \text{falls } x = 0;\\ 1/q, & \text{falls } x = p/q \in \mathbb{Q} \text{ mit } p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \text{ teilerfremd.}\end{cases}$$
Zeigen Sie, daß f genau in den Punkten $x_0 \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ stetig ist.

Hausaufgabe 2. Die Sägezahnfunktion $s\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist definiert durch $s(x) = |[x+1/2]-x|$, wobei $[\,.\,]$ die Gauß-Klammer bezeichnet. Zeichnen Sie den Graphen von s und zeigen Sie:

(i) Für $|x| \leq 1/2$ gilt $s(x) = |x|$.

(ii) $s(x+n) = s(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$.

(iii) Die Funktion $s(x)$ ist stetig.

Hausaufgabe 3. Seien $D \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ (aber nicht notwendigerweise $x_0 \in D$) und $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Man schreibt
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = c,$$
falls gilt:

(i) Es existiert eine Folge (x_n) in $D\setminus\{x_0\}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. Dazu sagt man auch: x_0 ist ein **Häufungspunkt** von D.

(ii) Für jede solche Folge (x_n) gilt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = c$.

b.w.

Man kann auch $x_0 = \pm\infty$ und $c = \pm\infty$ zulassen. So bedeutet zum Beispiel

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

folgendes:

(i) Es existiert eine Folge (x_n) in D mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, d.h.

$$\forall\, R \in \mathbb{R}\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}:\ x_n > R \text{ für alle } n \geq n_0.$$

(ii) Für jede solche Folge (x_n) gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \infty$.

Berechnen Sie folgende Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \left(x \cdot \left[\frac{1}{x}\right]\right)$, mit $[\,.\,]$ die Gauß-Klammer;

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x}\right)$;
Hinweis: Dritte binomische Formel $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

(c) $\lim\limits_{x\to 1} (x^r - 1)/(x-1)$ für $r \in \mathbb{Q}$.
Hinweis: Berechnen Sie den Grenzwert zunächst für $r \in \mathbb{N}$.

Bonusaufgabe. Eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ mit $D \subset \mathbb{R}$ heißt bekanntlich stetig in $x_0 \in D$, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so daß gilt

$$|x - x_0| < \delta,\ x \in D \qquad \Longrightarrow \qquad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Dieses δ wird im allgemeinen nicht nur von ε abhängen, sondern auch von x_0.

Die Funktion f heißt **gleichmäßig stetig** auf D, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ existiert, so daß gilt

$$|x - x'| < \delta,\ x, x' \in D \qquad \Longrightarrow \qquad |f(x) - f(x')| < \varepsilon.$$

Zeigen Sie:

(i) Die Funktion $x \mapsto \sqrt{x}$ ist gleichmäßig stetig auf dem Intervall $[0,1]$.

(ii) Die Funktion $x \mapsto 1/x$ ist nicht gleichmäßig stetig auf $(0,1]$.

(iii) Sei s die Sägezahnfunktion aus Aufgabe 3. Dann ist $x \mapsto s(1/x)$ auf $(0,1]$ beschränkt, aber nicht gleichmäßig stetig.

Knobelaufgabe. Geben Sie explizit eine Menge $M \subset \mathbb{R}^2$ an, so daß die folgenden Mengen alle verschieden sind:

$$M,\quad \mathring{M},\quad \overline{M},\quad \mathring{\overline{M}},\quad \overline{\mathring{M}},\quad \overline{\mathring{\overline{M}}},\quad \mathring{\overline{\mathring{M}}}$$

Abgabe der Haus- und Bonusaufgaben: Montag, 26.11.18
bis spätestens 18 Uhr in den Briefkästen
im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock).

Geben Sie bitte unbedingt die Nummer Ihrer Übungsgruppe an, andernfalls können Ihre Lösungen nicht bewertet werden!