

Analysis I

Übungsblatt 11

Präsenzaufgabe. Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale:

$$(a) \int x \sin x \, dx \qquad (b) \int \arctan \sqrt{x} \, dx \qquad (c) \int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2} \, dx$$

Hausaufgabe 1. (a) Sei $f \in C^n(I)$ und $x_0 \in I$. Zeigen Sie, daß für alle $x \in I$ gilt:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \varphi(x) \cdot (x - x_0)^n,$$

wobei φ eine Funktion mit $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = 0$ ist.

(b) Wenden Sie (a) auf die Funktion $f: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{1+x}$ mit $x_0 = 0$ und $n = 1$ an. Zeigen Sie damit, daß

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x}) = \frac{1}{2},$$

vergl. Übungsblatt 7, Hausaufgabe 3.

Hausaufgabe 2. Es seien a, b positive reelle Zahlen mit $a < b$. Zeigen Sie mittels Riemannscher Unter- und Obersummen, daß die Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$, Riemann-integrierbar ist, und daß der Wert des Integrals gegeben ist durch

$$\int_a^b x^2 \, dx = \frac{1}{3} (b^3 - a^3).$$

Verwenden Sie dazu die Zerlegung $Z_n = (x_0, \dots, x_n)$, $n \in \mathbb{N}$, gegeben durch

$$x_i = a + i \frac{b-a}{n}, \quad i = 0, \dots, n.$$

Zeigen Sie die Existenz der Grenzwerte von $U(Z_n, f)$ und $O(Z_n, f)$ für $n \rightarrow \infty$, und daß beide Grenzwerte gleich $(b^3 - a^3)/3$ sind.

b.w.

Bonusaufgabe. Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion. Setze

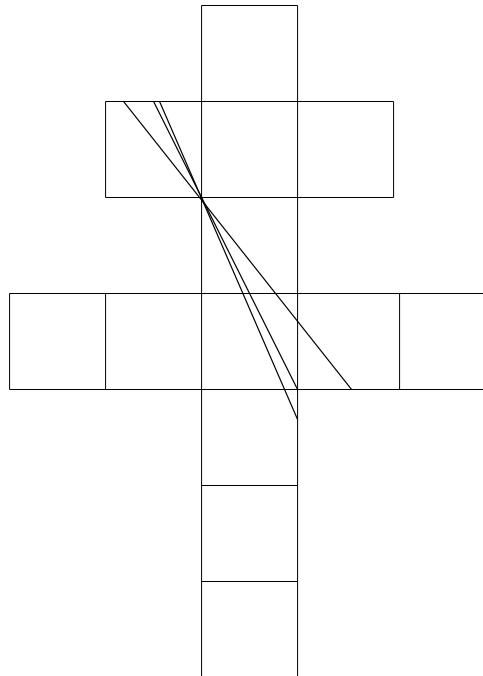
$$f_+(x) = \max(f(x), 0),$$

das heißt

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{falls } f(x) > 0, \\ 0 & \text{falls } f(x) \leq 0. \end{cases}$$

Analog definieren wir $f_-(x) = -\min(f(x), 0)$. Zeigen Sie, daß die Funktionen f_+ , f_- und $|f|$ über $[a, b]$ Riemann-integrierbar sind.

Knobelaufgabe (Fürs Warten aufs Christkind). Gegeben sei ein aus 13 Quadraten aufgebautes Erzbischofskreuz. Gesucht ist eine Gerade durch den Punkt A , die das Kreuz in zwei Teile gleichen Flächeninhalts zerlegt. Bestimmen Sie diese Gerade, und geben Sie eine Konstruktion dieser Geraden mit Zirkel und Lineal an.



Abgabe der Haus- und Bonusaufgaben: Montag, 7.1.19
 bis spätestens 18 Uhr in den Briefkästen
 im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock).

**Geben Sie bitte unbedingt die Nummer Ihrer Übungsgruppe an,
 andernfalls können Ihre Lösungen nicht bewertet werden!**