WS 2019/20

Prof. Hansjörg Geiges
Tilman Becker, M.Sc.
Laura Jaust, M.Sc.

Analysis III

Übungsblatt 7

Aufgabe 1. Es sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine Nullmenge, d.h. zu jedem $\varepsilon > 0$ existiere eine abzählbare Familie von Quadern $Q_1, Q_2, \dots$ mit $A \subset \cup_{j=1}^{\infty} Q_j$ und $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda(Q_j) < \varepsilon$, wobei λ das n-dimensionale Lebesgue-Maß bezeichnet, also $\lambda(Q_j) =$ Produkt der Kantenlängen.

(a) Zeigen Sie, daß die abzählbare Vereinigung $\cup_{k=1}^{\infty} A_k$ von Nullmengen $A_k \subset \mathbb{R}^n$ wieder eine Nullmenge ist.

(b) Sei $f\colon A \to \mathbb{R}^n$ eine Lipschitz-stetige Abbildung, d.h. es existiere eine Konstante L, so daß $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$. Zeigen Sie, daß dann auch $f(A)$ eine Nullmenge ist.

Bemerkung: Diese Aussage ist i.a. falsch, wenn die Abbildung f nur stetig ist. Zum Beispiel gibt es eine surjektive stetige Abbildung eines Intervalles auf ein Quadrat.

(c) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Zeigen Sie, daß f lokal einer Lipschitz-Bedingung genügt, d.h. zu jedem Punkt $p \in U$ gibt es eine Umgebung, auf der f Lipschitz-stetig ist.

(d) Folgern Sie: Ist $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Abbildung auf einer offenen Umgebung $U \supset A$ der Nullmenge A, so ist auch $f(A)$ eine Nullmenge.

(e) Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine meßbare Menge und $g\colon M \to \mathbb{R}$ meßbar. Zeigen Sie mittels des Cavalierischen Prinzips, daß der Graph $\big\{(x, g(x))\colon x \in M\big\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine Nullmenge ist. Insbesondere sind damit Untermannigfaltigkeiten positiver Kodimension stets Nullmengen.

Aufgabe 2. Sei Ω der im ersten Quadranten liegende Teil der Einheitskreisscheibe. Berechnen Sie $\int_{\Omega} xy\,dx\,dy$ auf beide der folgenden Weisen:

(i) Direkt, indem Sie Ω parametrisieren als

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\colon 0 \leq y \leq 1,\ 0 \leq x \leq \sqrt{1 - y^2}\},$$

und das Integral als iteriertes Integral

$$\int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-y^2}} xy\,dx \right) dy$$

interpretieren.

(ii) Durch Transformation auf Polarkoordinaten und Verwendung der Transformationsformel.

Aufgabe 3. Berechnen Sie den Flächeninhalt des Kegels

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\colon x^2 + y^2 = z^2,\ x^2 + y^2 \leq 1,\ z \geq 0\}$$

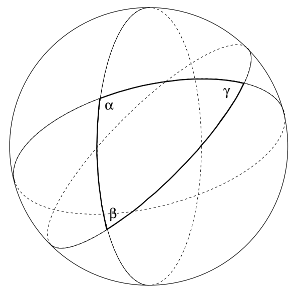
mittels jeder der folgenden Methoden:

(i) Flächeninhaltsformel aus der Vorlesung, mit der Parametrisierung $(x, y) \mapsto (x, y, \sqrt{x^2 + y^2})$.

(ii) Wie (i), aber mit der Parametrisierung $(r, \varphi) \mapsto (r\cos\varphi, r\sin\varphi, r)$.

(iii) 'Aufschneiden' des Kegels entlang $\{x = z \in [0, 1],\ y = 0\}$ und 'Ausrollen' in der Ebene; dann elementargeometrische Überlegung.

Aufgabe 4. Zeigen Sie, daß ein von drei Großkreisen auf S^2 berandetes sphärisches Dreieck mit den Winkeln α, β, γ den Flächeninhalt $\alpha + \beta + \gamma - \pi$ hat. Diese Zahl heißt der **sphärische Exzeß** des Dreiecks.



Hinweis: Wie groß ist der Flächeninhalt zwischen zwei Großkreisen? Der Flächeninhalt des Dreiecks ergibt sich dann aus einer elementargeometrischen Überlegung.

Abgabe: Mittwoch, 27.11.19
bis spätestens 18 Uhr in den Briefkästen
im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock).