WS 2019/20 Prof. Hansjörg Geiges
Tilman Becker, M.Sc.
Laura Jaust, M.Sc.

Analysis III

Übungsblatt 10

Aufgabe 1. Die 'nördliche' Hemisphäre der Einheitssphäre $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ sei mittels der stereographischen Projektion vom 'Südpol' aus parametrisiert, d.h. für $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ mit $u^2+v^2<1$ sei $\Phi(u,v)$ der Schnittpunkt von S^2 mit der Geraden durch die Punkte $(u,v,0)$ und $(0,0,-1)$.

(a) Zeigen Sie, daß
$$\Phi(u,v) = \left(\frac{2u}{1+u^2+v^2}, \frac{2v}{1+u^2+v^2}, \frac{1-u^2-v^2}{1+u^2+v^2}\right).$$

(b) Berechnen Sie $\displaystyle\int_{\{u^2+v^2<1\}} \Phi^*\omega$ für die 2-Form
$$\omega = x\,dy \wedge dz + y\,dz \wedge dx + z\,dx \wedge dy.$$

Aufgabe 2. Verifizieren Sie im Detail, daß die abgeschlossene Kreisscheibe
$$D^2 = \bigl\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon\ x^2+y^2 \leq 1\bigr\}$$
eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit mit Rand
$$S^1 = \bigl\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon\ x^2+y^2 = 1\bigr\}$$
ist, indem Sie zu einem gegebenen Punkt a in $D^2 \setminus S^1$ einerseits und in S^1 andererseits eine explizite Parametrisierung einer Umgebung in D^2 mittels $\Omega \subset \mathbb{R}^2_-$ angeben. Für $a \in D^2 \setminus S^1$ kann man mit einem allgemeinen Punkt arbeiten; für $a \in S^1$ betrachten Sie z.B. konkret $a = (0,-1)$.

Aufgabe 3. Das Möbiusband M kann als die Menge
$$\begin{aligned}\bigl\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon\ & x = \cos t\bigl(1+s\cos(t/2)\bigr),\ y = \sin t\bigl(1+s\cos(t/2)\bigr)\\ & z = s\sin(t/2),\ t \in [0,2\pi], s \in (-1/2,1/2)\bigr\}\end{aligned}$$
dargestellt werden.

(a) Fertigen Sie eine möglichst genaue Zeichnung dieser Menge an.

(b) Beschreiben Sie M mittels zweier Karten, indem Sie den Parameterbereich jeweils geeignet einschränken, und zeigen Sie dadurch, daß M eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist. (Warum folgt dies nicht unmittelbar aus der obigen Darstellung?)

(c) Zeigen Sie, daß M nicht orientierbar ist.

In der Vorlesung wurde argumentiert, daß eine Untermannigfaltigkeit, die sich mit zwei Kartengebieten W_1, W_2 überdecken läßt, stets orientierbar ist – hierzu muß aber gewährleistet sein, daß $W_1 \cap W_2$ zusammenhängend ist. Bei den stereographischen Projektionen der Sphäre vom Nord- bzw. Südpol ist dies der Fall; im obigen Beispiel aber nicht.

b.w.

Aufgabe 4. Es sei M der Torus, der durch Rotation des Kreises $(x-a)^2+z^2=1$ (mit $a>1$ gegeben) um die z-Achse entsteht.

(a) Zeigen Sie, daß M als Bildmenge der Abbildung

$$\Phi(u,v) = \begin{pmatrix} (a+\cos v)\cos u \\ (a+\cos v)\sin u \\ \sin v \end{pmatrix},\ u \in [0,2\pi],\ v \in [0,2\pi]$$

beschrieben werden kann.

(b) Es sei ω die 2-Form

$$\omega = x\,dy \wedge dz - y\,dx \wedge dz + z\,dx \wedge dy.$$

Berechnen Sie $\int_M \omega$, wobei M die durch Φ gegebene Orientierung tragen soll.

Bonusaufgabe. Für $(u,v,w) \in \mathbb{R}^3$ wird durch

$$\begin{aligned} x_1 &= u^2 & x_2 &= v^2 & x_3 &= w^2 \\ x_4 &= vw & x_5 &= uw & x_6 &= uv \end{aligned}$$

eine C^∞-Abbildung $\Phi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^6$ definiert. Wie ist die Definitionsmenge einzuschränken, daß Φ eine Immersion wird? Welches sind möglichst große konvexe Mengen dieser Art? Ist Φ bei der Einschränkung auf solche Mengen injektiv? Ist Φ^{-1} stetig?

Bonusaufgabe. (a) Es sei Φ die Abbildung aus der ersten Bonusaufgabe und $M \subset \mathbb{R}^6$ das Bild der 2-Sphäre $\{u^2+v^2+w^2=1\}$ unter Φ. Zeigen Sie, daß M eine nicht-orientierbare kompakte 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^6$ ist.

(b) Zeigen Sie die analoge Aussage für die durch

$$\begin{aligned} x_1 &= uv & x_2 &= uw \\ x_3 &= vw & x_4 &= v^2 - w^2 \end{aligned}$$

gegebene Abbildung $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$.

In beiden Fällen ist das Bild der 2-Sphäre die 2-dimensionale Mannigfaltigkeit $S^2/x \sim -x$, d.h. die sogenannte projektive Ebene.

Abgabe: Mittwoch, 18.12.19
bis spätestens 18 Uhr in den Briefkästen
im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock).