WS 2019/20

Prof. Hansjörg Geiges
Tilman Becker, M.Sc.
Laura Jaust, M.Sc.

Analysis III

Übungsblatt 11

Aufgabe 1. Im $\mathbb{R}^2$ betrachten wir die 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit

$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x \geq 0, \, y \geq 0, \, x^2 + y^2 \leq 1\},$$

die einen stückweise glatten Rand hat, und die 1-Form ω, definiert durch

$$\omega_{(x,y)} = \frac{x\, dy - y\, dx}{x^2 + y^2} \text{für } (x,y) \neq (0,0) \quad \text{und} \quad \omega_{(0,0)} = 0.$$

Welche Stetigkeits- und Differenzierbarkeitseigenschaften hat ω auf M und ∂M? Berechnen Sie $\int_M d\omega$ und $\int_{\partial M} \omega$. Warum ist der Satz von Gauß nicht anwendbar? (Daß der Rand nur stückweise glatt ist, ist nicht das Problem.)

Aufgabe 2. Auf dem $\mathbb{R}^3$ betrachten wir die 2-Form

$$\omega = xy\, dx \wedge dy + 2x\, dy \wedge dz - 2y\, dz \wedge dx.$$

(a) Rechnen Sie nach, daß ω geschlossen ist.

(b) Bestimmen Sie, ausgehend von einem Ansatz

$$\eta = f(x,y,z)\, dx + g(x,y,z)\, dy + h(x,y,z)\, dz,$$

eine 1-Form η mit $d\eta = \omega$.

(c) Zeigen Sie auf möglichst einfache Weise, daß das Integral von ω über die obere Hemisphäre

$$S^2_+ = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 + z^2 = 1, \; z \geq 0\}$$

verschwindet.

Aufgabe 3. Es sei C der Kreis im $\mathbb{R}^2$, der durch die Gleichung $x^2 + (y-1)^2 = 1$ beschrieben wird. Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_C (xy^2\, dy - x^2 y\, dx)$$

(a) direkt;

(b) unter Verwendung der Green–Riemannschen Formel.

b.w.

Aufgabe 4. Es sei Q ein achsenparalleler Quader im $\mathbb{R}^3$. Man definiere den orientierten Rand ∂Q in naheliegender Weise und beweise den Gaußschen Integralsatz

$$\int_Q d\omega = \int_{\partial Q} \omega,$$

wobei ω eine in einer Umgebung von Q stetig differenzierbare 2-Form ist, durch Anwendung des Satzes von Fubini.

Abgabe: Mittwoch, 8.1.20
bis spätestens 18 Uhr in den Briefkästen
im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock).