WS 2020/21

Prof. Hansjörg Geiges
Tilman Becker, M.Sc.
Laura Jaust, M.Sc.

Elementare Differentialgeometrie

Übungsblatt 4

Aufgabe 1. Die Sphäre S^2 läßt sich durch zwei Flächenstücke vollständig beschreiben, z.B. mittels stereographischer Projektion von Nord- bzw. Südpol $(0, 0, \pm 1)$ (vergl. Blatt 3, Aufgabe 4). Berechnen Sie die Koordinatentransformation zwischen diesen beiden Flächenstücken und zeigen Sie damit, daß S^2 eine Fläche ist.

Aufgabe 2. Betrachten Sie das parametrische Flächenstück

$$\mathbf{x}(r, \varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, r), \quad r \in \mathbb{R}^+,\ \varphi \in (0, 2\pi).$$

Bestimmen Sie die Komponenten des metrischen Tensors (g_{ij}). Sei $\boldsymbol{\alpha}(t)$ die Kurve in diesem Flächenstück, die im Parameterbereich gegeben ist durch $r(t) = \mathrm{e}^{t(\cot\theta)/2}$ und $\varphi(t) = t/\sqrt{2}$, mit $t \in [0, \pi]$ und einer Konstanten θ. Berechnen Sie die Länge dieser Kurve und zeigen Sie, daß θ der Winkel zwischen der Kurve $\boldsymbol{\alpha}(t)$ und den Kurven $\varphi =$ konst. auf dem Flächenstück ist.

Aufgabe 3. Man betrachte eine Kurve in der (r, z)-Ebene gegeben durch $\boldsymbol{\alpha}(t) = (r(t), z(t))$ für $t \in (a, b)$ mit $r(t) > 0$. Wenn diese um die z-Achse gedreht wird, erhalten wir eine **Rotationsfläche**. Diese Fläche können wir wie folgt parametrisieren. Dazu ist es nützlich, die Parameter t und φ zu verwenden, wobei t die Position auf der Kurve bestimmt und φ den Drehwinkel. Dann können wir definieren

$$\mathbf{x}(t, \varphi) = (r(t)\cos\varphi, r(t)\sin\varphi, z(t)) \quad \text{für } t \in (a, b) \text{ und } \varphi \in (0, 2\pi).$$

Die t-Kurven heißen **Meridiane** und die φ-Kurven **Breitenkreise**.

(a) Zeigen Sie, daß $\mathbf{x}$ ein parametrisches Flächenstück ist, falls $\boldsymbol{\alpha}$ regulär und injektiv ist. Berechnen Sie $\mathbf{x}_1 = \partial\mathbf{x}/\partial t$, $\mathbf{x}_2 = \partial\mathbf{x}/\partial\varphi$ und den Einheitsnormalenvektor $\mathbf{n}$.

(b) Betrachten Sie die zu $\boldsymbol{\alpha}(t) = (r(t), z(t)) = (2 + \cos t, \sin t)$ gehörende Rotationsfläche für $t \in (-\pi, \pi)$. Zeigen Sie, daß die Bedingungen aus (a) erfüllt sind, und beschreiben Sie die dort genannten Größen explizit. Wie sieht diese Fläche aus? Beschreiben Sie ihre Meridiane und Breitenkreise in parametrisierter Form.

(c) Berechnen Sie die metrischen Koeffizienten einer Rotationsfläche.

b.w.

Aufgabe 4. (a) Zeigen Sie, daß jede nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve mit Spur auf der 2-Sphäre S^2 (vom Radius 1) die gleiche konstante Normalkrümmung hat (bei gegebener Wahl des Einheitsnormalenvektors $\mathbf{n}$). Was ist der Wert dieser Normalkrümmung? Wie lautet die Antwort, wenn man eine Sphäre vom Radius r betrachtet?

(b) Wir parametrisieren die 2-Sphäre S^2 (bis auf den Nullmeridian) durch

$$\mathbf{x}(\theta, \varphi) = (\cos\theta\cos\varphi, \cos\theta\sin\varphi, \sin\theta), \quad \theta \in (-\pi/2, \pi/2),\ \varphi \in (0, 2\pi),$$

so daß θ der Breitengrad ist. Bestimmen Sie die geodätische Krümmung der Breitenkreise $\varphi \mapsto \mathbf{x}(\theta_0, \varphi)$ in Abhängigkeit vom Breitengrad θ_0. Beachten Sie, daß φ i.a. nicht der Bogenlängenparameter des Breitenkreises ist.

Abgabe: Dienstag, 1.12.20

bis spätestens 12:00 Uhr im ILIAS-Kurs