WS 2020/21

Prof. Hansjörg Geiges
Tilman Becker, M.Sc.
Laura Jaust, M.Sc.

Elementare Differentialgeometrie

Übungsblatt 8

Aufgabe 1. Betrachten Sie die Flächenstücke

$$\mathbf{x}(t,\varphi) = (t\cos\varphi, t\sin\varphi, \log t)$$
$$\text{und} \qquad \mathbf{y}(t,\varphi) = (t\cos\varphi, t\sin\varphi, \varphi)$$

für $(t,\varphi) \in \mathbb{R}^+ \times (0, 2\pi)$.

(a) Berechnen Sie die metrischen Koeffizienten (g_{ij}) bzw. $(\widetilde{g}_{ij})$ für die beiden Flächenstücke, und zeigen Sie damit, daß $\mathbf{y} \circ \mathbf{x}^{-1}$ **keine** Isometrie ist.

(b) Zeigen Sie, daß $K(\mathbf{x}(t,\varphi)) = K(\mathbf{y}(t,\varphi)) = -1/(1+t^2)^2$.

Dieses Beispiel zeigt, daß die Umkehrung des *theorema egregium* i.a. falsch ist: Ein Diffeomorphismus $\varphi\colon M \to N$ zwischen Flächen, der $K_M(p) = K_N(\varphi(p))$ erfüllt für alle $p \in M$, muß keine lokale Isometrie sein.

Aufgabe 2. Ein Diffeomorphismus $\varphi\colon M \to N$ heißt **konforme Abbildung**, falls

$$\langle d\varphi(\mathbf{X}), d\varphi(\mathbf{Y})\rangle_{\varphi(p)} = \lambda(p)\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y}\rangle_p$$

für alle $p \in M$ und $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in T_pM$, wobei $\lambda\colon M \to \mathbb{R}^+$ eine differenzierbare Funktion ist. Analog zum Begriff der lokalen Isometrie spricht man von **lokal konformen** Abbildungen. Zeigen Sie, daß S^2 lokal konform zur Ebene ist.
Hinweis: stereographische Projektion.

Aufgabe 3. Sei M eine Fläche im $\mathbb{R}^3$ mit der Eigenschaft, daß jeder ihrer Punkte ein Nabelpunkt ist. Zeigen Sie, daß jeder Punkt von M eine Umgebung in M besitzt, die eine offene Teilmenge einer Ebene oder einer Sphäre ist.

Aufgabe 4. Zeigen Sie, daß die Menge

$$M := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon\ x^2 + y^2 - z^2 = 1\right\}$$

eine Fläche ist. Parametrisieren Sie M als Rotationsfläche, und bestimmen Sie damit die Gaußkrümmung von M. Verifizieren Sie insbesondere, daß diese Gaußkrümmung in jedem Punkt von M negativ ist.

Abgabe: Dienstag, 12.1.21
bis spätestens 12:00 Uhr im ILIAS-Kurs