WS 2021/22 Prof. Hansjörg Geiges
Tilman Becker, M.Sc.

Algebraische Topologie

Übungsblatt 1

Zur Erinnerung: Ein **topologischer Raum** ist ein Paar $(X, \mathcal{O})$ bestehend aus einer Menge X und einer Menge $\mathcal{O}$ von Teilmengen von X, genannt **offene Mengen**, mit den Eigenschaften:

(i) $\emptyset, X \in \mathcal{O}$,

(ii) der Durchschnitt je zweier offener Mengen ist offen,

(ii) die Vereinigung beliebig vieler offener Mengen ist offen.

Eine Abbildung $f\colon (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ zwischen zwei topologischen Räumen heißt **stetig**, falls $f^{-1}(V) \in \mathcal{O}_X$ für alle $V \in \mathcal{O}_Y$.

Aufgabe 1. Sei X ein topologischer Raum und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X. Mit $X/\sim$ werde die Menge der Äquivalenzklassen bezeichnet. Wir schreiben $[x] \in X/\sim$ für die Äquivalenzklasse von $x \in X$ und $\pi\colon X \to X/\sim$ für die kanonische Projektion, d.h. $\pi(x) := [x]$. Wir nennen $U \subset X/\sim$ offen, falls $\pi^{-1}(U)$ offen in X ist.

Zeigen Sie:

(i) Dies definiert eine Topologie auf $X/\sim$, die sogenannte **Quotiententopologie**.

(ii) Die Quotiententopologie ist die feinste Topologie auf $X/\sim$ (d.h. die Topologie mit den meisten offenen Mengen), für die π stetig ist.

(iii) Für einen weiteren topologischen Raum Y ist eine Abbildung $f\colon X/\sim \to Y$ genau dann stetig, wenn $f \circ \pi\colon X \to Y$ stetig ist.

Der **projektive Raum** $\mathbb{RP}^n$ ist der Raum aller Ursprungsgeraden im $\mathbb{R}^{n+1}$. Formal kann man $\mathbb{RP}^n$ definieren als Quotientenraum $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}/\sim$, wobei die Äquivalenzrelation gegeben ist durch

$$x \sim y :\Longleftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\colon\ y = \lambda x.$$

Alternativ kann man $\mathbb{RP}^n$ schreiben als $S^n/x \sim -x$. Die Äquivalenzklasse eines Punktes

$$(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$$

schreibt man dann in **homogenen Koordinaten** als $[x_0 : \ldots : x_n]$, d.h. es gilt

$$[x_0 : \ldots : x_n] = [\lambda x_0 : \ldots : \lambda x_n] \text{ für alle } \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Für $x_n \neq 0$ gilt also

$$[x_0 : \ldots : x_n] = [\frac{x_0}{x_n} : \ldots : \frac{x_{n-1}}{x_n} : 1].$$

Der Punkt $(x_0/x_n, \ldots, x_{n-1}/x_n, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$ ist dabei der Schnittpunkt der durch $[x_0 : \ldots : x_n]$ bestimmten Ursprungsgeraden mit der Hyperebene $\{x_n = 1\}$. Die Punkte des $\mathbb{RP}^n$ dieser Form kann man also mit $\mathbb{R}^n$ identifizieren. Die Punkte der Form $[x_0 : \ldots : x_{n-1} : 0]$ entsprechen den Ursprungsgeraden parallel zu $\{x_n = 1\}$; diese bilden einen $\mathbb{RP}^{n-1}$. Als Punktmenge können wir daher schreiben $\mathbb{RP}^n = \mathbb{R}^n \cup \mathbb{RP}^{n-1}$. Man spricht vom $\mathbb{RP}^{n-1}$ 'im Unendlichen'.

b.w.

Aufgabe 2. (a) Zeigen Sie, daß der Raum, der aus D^2 durch Identifikation von x mit $-x$ für alle Randpunkte $x \in S^1 = \partial D^2$ entsteht, homöomorph zur projektiven Ebene $\mathbb{RP}^2$ ist.

(b) Zeigen Sie, daß man die Kleinsche Flasche als Quotientenraum $\mathbb{R}^2/\sim$ auffassen kann, wobei die Äquivalenzrelation $\sim$ gegeben ist durch

$$(x, y) \sim (x + 1, y) \text{ und } (x, y) \sim (-x + 1, y + 1).$$

(c) Wir fassen S^1 als Teilmenge von $\mathbb{C}$ auf:

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| = 1\}.$$

Zeigen Sie, daß die Abbildung

$$\begin{array}{cccc} \alpha\colon & S^1 \times S^1 & \longrightarrow & S^1 \times S^1 \\ & (z, w) & \longmapsto & (\overline{z}, -w) \end{array}$$

ein Homöomorphismus des 2-Torus $T^2 = S^1 \times S^1$ mit $\alpha \circ \alpha = \mathrm{id}_{T^2}$ ist. Zeigen Sie weiter, daß der Quotientenraum $T^2/x \sim \alpha(x)$ homöomorph zur Kleinschen Flasche ist.

Aufgabe 3. Ist $f\colon X \to Y$ eine injektive Abbildung und $f\colon X \to f(X)$ ein Homöomorphismus, wenn man $f(X)$ die durch Y induzierte Topologie gibt, so heißt f eine **Einbettung**. Zeigen Sie:

(a) Jede stetige und injektive Abbildung eines kompakten Raumes in einen Hausdorff-Raum ist eine Einbettung.

(b) Die Abbildung $f\colon S^2 \to \mathbb{R}^4$ gemäß

$$f(x, y, z) = (x^2 - y^2, xy, xz, yz),$$

wobei S^2 die Einheitssphäre $\{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ im $\mathbb{R}^3$ bezeichnet, induziert eine Einbettung von $\mathbb{RP}^2 = S^2/(x, y, z) \sim -(x, y, z)$ in den $\mathbb{R}^4$.

Aufgabe 4. Sei X ein topologischer Raum und $f\colon S^n \to X$ eine stetige Abbildung. Zeigen Sie, daß sich f genau dann zu einer stetigen Abbildung $D^{n+1} \to X$ fortsetzen läßt, wenn f **nullhomotop** ist, d.h. homotop zu einer konstanten Abbildung.

Abgabe: Montag, 18.10.21
bis spätestens 18:00 Uhr im ILIAS-Kurs