WS 2021/22

Prof. Hansjörg Geiges
Tilman Becker, M.Sc.

Algebraische Topologie

Übungsblatt 7

Aufgabe 1. Ein topologischer Raum X heißt **zusammenhängend**, wenn er sich nicht in zwei nichtleere, offene, disjunkte Teilmengen zerlegen läßt. Zeigen Sie:

(a) X ist zusammenhängend genau dann, wenn $\emptyset$ und X die einzigen Teilmengen von X sind, die zugleich offen und abgeschlossen sind.

(b) Sei $f\colon X \to Y$ stetig und X zusammenhängend. Dann ist $f(X)$ zusammenhängend.

(c) Seien $U_1, U_2 \subset X$ zusammenhängende Teilmengen mit $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$. Dann ist $U_1 \cup U_2$ zusammenhängend.

(d) Für $p, q \in X$ definiere

$$p \sim q \quad :\Longleftrightarrow \quad p \text{ und } q \text{ liegen in derselben zusammenhängenden Teilmenge von } X.$$

Zeigen Sie: Dies definiert eine Äquivalenzrelation. Die zugehörigen Äquivalenzklassen heißen **Komponenten** von X.

(e) Ein topologischer Raum X heißt **wegzusammenhängend**, falls es zu je zwei Punkten $p_0, p_1 \in X$ einen Weg von p_0 nach p_1 gibt, d.h. eine stetige Abbildung $\gamma\colon I \to X$ mit $\gamma(0) = p_0$ und $\gamma(1) = p_1$. Die **Wegkomponenten** eines topologischen Raumes sind die maximalen wegzusammenhängenden Teilmengen.

Ein topologischer Raum heißt **lokal wegweise zusammenhängend**, falls jede Umgebung jedes beliebigen Punktes eine wegzusammenhängende Umgebung enthält. Zeigen Sie, daß die Wegkomponenten eines lokal wegweise zusammenhängenden Raumes abgeschlossene, offene Teilmengen sind, die identisch sind mit den Komponenten.

Dies wurde im Beweis von Korollar 4.14 verwendet.

Aufgabe 2. (a) Verwenden Sie die Mayer–Vietoris-Sequenz zur Berechnung der Homologiegruppen des Torus und der Kleinschen Flasche, jeweils betrachtet als zwei geeignet miteinander verklebte Zylinder.

(b) Man zeige $S^{r+s+1} \cong (S^r \times D^{s+1}) \cup (D^{r+1} \times S^s)$ mit $(S^r \times D^{s+1}) \cap (D^{r+1} \times S^r) \cong S^r \times S^s$. Berechnen Sie die Homologie von $S^r \times S^s$.

Aufgabe 3. Konstruieren Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$ einen topologischen Raum X mit $H_1(X) \cong \mathbb{Z}_n$.

Aufgabe 4. (a) Wir fassen S^1 als den Einheitskreis in $\mathbb{C}$ auf. Zeigen Sie, daß der Abbildungsgrad der durch $f(z) = z^k$, $k \in \mathbb{Z}$, gegebenen Abbildung $f\colon S^1 \to S^1$ gleich k ist.

(b) Beschreiben Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{Z}$ eine stetige Abbildung $S^n \to S^n$ vom Abbildungsgrad k.

Abgabe: Montag, 29.11.21
bis spätestens 18:00 Uhr im ILIAS-Kurs