WS 2021/22

Prof. Hansjörg Geiges
Tilman Becker, M.Sc.

Algebraische Topologie

Übungsblatt 8

Aufgabe 1. Zeigen Sie die folgenden Aussagen (vergl. Abschnitt 4.4 der Vorlesung):

(a) Jede abgeschlossene Teilmenge eines kompakten topologischen Raumes ist kompakt.

(b) Ist $f\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen, und $K \subset X$ kompakt, dann ist $f(K) \subset Y$ kompakt.

(c) Jede kompakte Teilmenge eines Hausdorff-Raumes ist abgeschlossen.

(d) Jede injektive stetige Abbildung $f\colon X \to Y$ mit X kompakt und Y hausdorffsch ist eine Einbettung, d.h. ein Homöomorphismus von X auf $f(X)$ mit der von Y induzierten Topologie.

Aufgabe 2. (a) Seien M und N topologische Mannigfaltigkeiten der Dimension n (für die Definition vergl. Übungsblatt 6) und $f\colon M \to N$ eine injektive, stetige Abbildung. Zeigen Sie, daß f eine **offene Abbildung** ist, d.h. die Bilder offener Teilmengen in M unter der Abbildung f sind offen in N.

(b) Seien M und N homöomorphe Mannigfaltigkeiten der Dimension m bzw. n. Zeigen Sie durch Verwendung von (a), daß $m = n$. Auf Übungsblatt 6 hatten Sie dies mittels lokaler Homologiegruppen gezeigt.

Aufgabe 3. (a) Es seien A und B homöomorphe Teilmengen von $\mathbb{R}^n$. Falls A abgeschlossen ist, ist dann auch B abgeschlossen?

(b) Gibt es eine echte Teilmenge von S^n, die homöomorph zu S^n ist?

(c) Gibt es eine stetige, injektive Abbildung $S^n \to \mathbb{R}^n$?

Aufgabe 4. Seien $\Phi_0\colon Q_0(X) \to Q_1(X)$ und $\Phi_1\colon Q_1(X) \to Q_2(X)$ die im Beweis von Lemma 4.17 der Vorlesung definierten Homomorphismen. Überlegen Sie sich die folgende Konstruktion.

(a) Es gibt stets einen singulären 3-Quader $\tilde{T}\colon I^3 \to X$, bei dem die Seiten $A_2\tilde{T}$, $A_3\tilde{T}$, $B_1\tilde{T}$, $B_2\tilde{T}$ und $B_3\tilde{T}$ beliebig vorgeschrieben wurden.

b.w.

(b) Sei $T\colon I^2 \to X$ ein singulärer 2-Quader. Sei $\Phi_2 T\colon I^3 \to X$ ein singulärer 3-Quader, der folgende Randbedingungen erfüllt:

(i) $B_1\Phi_2 T = T$,

(ii) $A_i\Phi_2 T = \Phi_1 A_{i-1}T$, $i = 2,3$,

(iii) $B_i\Phi_2 T = \Phi_1 B_{i-1}T$, $i = 2,3$.

(Nach (a) existiert so ein 3-Quader.) Dann gilt

$$\partial\Phi_2 T + \Phi_1\partial T = T - \sigma_2(T) \tag{*}$$

mit $\sigma_2(T) := A_1\Phi_2 T$.

(c) Falls $T \in Q_2(X/x_0)$, definiere

$$(\Phi_2 T)(x_1,x_2,x_3) = T(x_2,x_3).$$

Dann sind die Randbedingungen in (b) erfüllt, und es gilt $\Phi_2 T \in Q_3(X/x_0)$.

(d) Sei T ein degenerierter 2-Quader, d.h. $T(x_1,x_2)$ hängt von einer der beiden Koordinaten nicht ab. Betrachten wir den Fall, daß $T(x_1,x_2)$ nur von x_2 abhängt. Dann gilt

$$T(x_1,x_2) = A_1T(x_2) = B_1T(x_2).$$

Definiere

$$(\Phi_2 T)(x_1,x_2,x_3) = (\Phi_1 A_1 T)(x_1,x_3) = (\Phi_1 B_1 T)(x_1,x_3).$$

Dann sind die Randbedingungen in (b) erfüllt, und $\Phi_2 T$ ist degeneriert.

Hinweis: Um einzusehen, daß $A_3\Phi_2 T = \Phi_1 A_2 T$, muß man sich z.B. überlegen, daß

$$\Phi_1 A_2 T(x_1,x_2) = \Phi_1 A_1 T(x_1,0) \quad \text{für alle } x_2 \in I$$

(warum?). Beachten Sie dazu, daß

$$\Phi_1 A_1 T(x_1,0) = A_2\Phi_1 A_1 T(x_1) = \Phi_0 A_1 A_1 T(x_1).$$

(e) Zeigen Sie $\partial_2\sigma_2 = \sigma_1\partial_2$ direkt aus der Definition von σ_2 oder aus $(*)$.

Dies schließt den Beweis von Lemma 4.17 (für $n = 2$) ab.

Abgabe: Montag, 6.12.21
bis spätestens 18:00 Uhr im ILIAS-Kurs