WS 2021/22

Prof. Hansjörg Geiges
Tilman Becker, M.Sc.

Algebraische Topologie

Übungsblatt 9

Aufgabe 1. Schreiben Sie S^n als die Vereinigung von zwei offenen Mengen, die invariant unter der antipodischen Abbildung sind, und benutzen Sie dies, um die Homologie von $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ mittels der Mayer–Vietoris-Sequenz zu berechnen.

Aufgabe 2. (a) Stellen Sie den 3-Torus $T^3 = S^1 \times S^1 \times S^1$ als Vereinigung von zwei offenen Mengen A und B dar mit $A \simeq B \simeq T^2$ und $A \cap B \simeq T^2 + T^2$. Berechnen Sie die Homologie von T^3 mittels der Mayer–Vietoris-Sequenz.

(b) Geben Sie dem 3-Torus die Struktur eines CW-Komplexes und berechnen Sie seine Homologie

(i) induktiv über die singuläre Homologie der Unterskelette (d.h. mittels Korollar 5.2 der Vorlesung);

(ii) mittels zellulärer Homologie.

Aufgabe 3. Seien $p > 1$ und q teilerfremde ganze Zahlen. Definiere $L(p,q)$ als den Quotientenraum, den man aus D^3 durch Identifizieren von Punkten auf $S^2 = \partial D^3$ wie folgt erhält: Jeder Punkt auf der oberen Hemisphäre von S^2 wird identifiziert mit dem Punkt auf der unteren Hemisphäre, den man durch Rotation um die vertikale Achse um $2\pi q/p$ und Spiegelung im Äquator erhält. (Punkte in den offenen Hemisphären werden also paarweise identifiziert; auf dem Äquator werden jeweils p Punkte im Abstand $2\pi n/p$, $n = 1, 2, \ldots, p-1$, miteinander identifiziert.) Dieser Raum $L(p,q)$ heißt **Linsenraum**.

(a) Geben Sie $L(p,q)$ die Struktur eines CW-Komplexes mit je einer Zelle in Dimension $0, 1, 2, 3$.

(b) Zeigen Sie

$$H_k(L(p,q)) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{für } k = 0, 3, \\ \mathbb{Z}_p & \text{für } k = 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aufgabe 4. In der Algebra zeigt man, daß jede endlich erzeugte abelsche Gruppe A von der Form

$$A = \mathbb{Z}^r \oplus \mathbb{Z}_{n_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{n_k}$$

ist, d.h. eine endliche direkte Summe von (endlichen oder unendlichen) zyklischen Gruppen. Sei

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von solchen Gruppen. Zeigen Sie, daß dann auch die induzierte Sequenz

$$0 \longrightarrow A \otimes \mathbb{Q} \xrightarrow{\alpha_{\mathbb{Q}}} B \otimes \mathbb{Q} \xrightarrow{\beta_{\mathbb{Q}}} C \otimes \mathbb{Q} \longrightarrow 0$$

exakt ist. Dies hatten wir im Beweis von Satz 5.6 der Vorlesung verwendet.
Warnung: Im allgemeinen ist das Tensorprodukt einer kurzen exakten Sequenz von Rechts-Λ-Moduln mit einem Links-Λ-Modul D nur rechtsexakt, d.h. es folgt nur die Exaktheit von

$$A \otimes D \longrightarrow B \otimes D \longrightarrow C \otimes D \longrightarrow 0.$$

Hinweis: Falls Sie mit dem Tensorprodukt nicht vertraut sind: Für A wie oben gilt $A \otimes \mathbb{Q} = \mathbb{Q}^r$. Der Homomorphismus $\alpha_{\mathbb{Q}}$ ist definiert durch $\alpha_{\mathbb{Q}}|_{\mathbb{Z}^r \subset \mathbb{Q}^r} = \alpha$ und $\mathbb{Q}$-lineare Erweiterung.

Abgabe: Montag, 13.12.21
bis spätestens 18:00 Uhr im ILIAS-Kurs