Homomorphiesatz. *Sei* $\varphi\colon G \to G'$ *ein surjektiver Gruppenhomomorphismus. Dann ist* $\ker\varphi$ *Normalteiler von* G *und es gilt* $G/\ker\varphi \cong G'$.

Beweis. $\ker\varphi$ ist Normalteiler: Für $g \in G$ und $n \in \ker\varphi$ gilt

$$\varphi(g^{-1}ng) = \varphi(g)^{-1}\varphi(n)\varphi(g) = \varphi(g)^{-1}\varphi(g) = 1,$$

d.h. $g^{-1}ng \in \ker\varphi$.

Setze $N = \ker\varphi$. Definiere $\overline{\varphi}\colon G/\ker\varphi \to G'$ durch $\overline{\varphi}(gN) = \varphi(g)$.

$\overline{\varphi}$ ist wohldefiniert: Falls $g_1N = g_2N$, dann $g_2 = g_1n$ für ein $n \in N$, und daher $\varphi(g_1) = \varphi(g_2)$.

$\overline{\varphi}$ ist surjektiv nach Voraussetzung an φ.

$\overline{\varphi}$ ist injektiv: Es gelte $\overline{\varphi}(g_1N) = \overline{\varphi}(g_2N)$, d.h. $\varphi(g_1) = \varphi(g_2)$. Damit folgt $g_1^{-1}g_2 \in N$, also $g_1N = g_1g_1^{-1}g_2N = g_2N$.

1. Isomorphiesatz der Gruppentheorie. *Es sei* G *eine Gruppe,* $H \subset G$ *eine Untergruppe und* $N \subset G$ *ein Normalteiler. Dann ist* HN *Untergruppe von* G *mit Normalteiler* N*, und* $H \cap N$ *ist Normalteiler von* H*. Weiter gilt*

$$H/(H \cap N) \cong (HN)/N.$$

Beweis. Die Normalteilereigenschaft besagt $g^{-1}ng \in N$ für jedes $g \in G$ und $n \in N$. Insbesondere existiert zu $h \in H$ und $n \in N$ ein $n' \in N$ mit $h^{-1}nh = n'$, bzw. $nh = hn'$.

Es folgt $h_1n_1h_2n_2 = h_1h_2n_1'n_2 \in HN$ für $h_i \in H$, $n_i \in N$, und $(hn)^{-1} = n^{-1}h^{-1} = h^{-1}(n^{-1})' \in HN$. Daher ist HN eine Untergruppe.

N ist normal in G, also auch in HN.

Betrachte den Homomorphismus

$$\varphi\colon H \hookrightarrow HN \to (HN)/N, \quad h \mapsto hN.$$

Es gilt $\ker\varphi = H \cap N$. Daher ist $H \cap N$ Normalteiler in H, und die behauptete Isomorphie folgt aus dem Homomorphiesatz.

Bemerkung. In der Vorlesung haben wir es mit abelschen Gruppen zu tun, wo wir die Verknüpfung als '+' schreiben. Dort hatte daher der 1. Isomorphiesatz die Gestalt

$$H/(H \cap N) \cong (H + N)/N.$$