Chirurgie

Übungsblatt 3

Aufgabe 1. Für $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{Z}$ teilerfremd ist der Linsenraum $L(p,q)$ definiert als der Quotientenraum $S^3/\sim$ vermöge der Äquivalenzrelation

$$(z_1, z_2) \sim (\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}/p}, \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} q/p})$$

auf $S^3 \subset \mathbb{C}^2$.

(a) $L(p,q)$ ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit.

(b) $L(p,q)$ besitzt eine Heegaard-Zerlegung vom Geschlecht 1.

(c) Zeichnen Sie das Heegaard-Diagramm (vom Geschlecht 1) für $L(p,q)$ als 2-dimensionales Diagramm.

Aufgabe 2. Der 3-Torus $T^3 = \mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3$ besitzt eine Henkelzerlegung mit je einem 0- und 3-Henkel und je drei 1- und 2-Henkeln. Zeichnen Sie ein Heegaard-Diagramm (als 2-dimensionales Diagramm).

Aufgabe 3. Gegeben sei eine Henkelzerlegung einer geschlossenen 3-Mannigfaltigkeit mit je einem 0- und 3-Henkel. Es bezeichne $H = W_1$ die Vereinigung der 0-Henkel mit den 1-Henkeln. Sei $H \cup_\psi H'$, mit $\psi\colon \partial H' \xrightarrow{\cong} \partial H$, die zugehörige Heegaard-Zerlegung.

(a) Welchen Sphären auf $\partial H'$ entsprechen (unter ψ) die Anklebesphären der 2-Henkel auf $\partial H = \partial W_1$?

(b) Zeigen Sie direkt, daß der Diffeomorphietyp von $H \cup_\psi H'$ nur von diesen Anklebesphären abhängt.

(c) Welche Bedingungen muß ein System von einfach geschlossenen Kurven auf ∂H erfüllen, damit es als Heegaard-Diagramm einer geschlossenen 3-Mannigfaltigkeit auftreten kann?

Aufgabe 4. (a) Was ist die Fundamentalgruppe der verbundenen Summe von m Kopien von $S^1 \times S^3$?

(b) Zeigen Sie mittels Chirurgie, daß jede endlich präsentierte Gruppe als Fundamentalgruppe einer geschlossenen 4-Mannigfaltigkeit realisiert werden kann.

Abgabe: Mittwoch 2.11.22 in der Übung.