Warum Lineare Algebra?

(von Gerd Fischer und Günter M. Ziegler)

Was ist Lineare Algebra?

Die Lineare Algebra gehört neben der reellen Analysis zum Curriculum für Studierende der Mathematik und anderer Fächer, die mathematische Methoden intensiv benutzen. Das liegt daran, dass sie zu den Grundpfeilern der Mathematik zählt, auf denen alles andere aufbaut. Zu den darüberliegenden Gebäudeteilen der Mathematik gehören beispielsweise Algebra, Differentialgleichungen, Numerik, Differentialgeometrie, Funktionalanalysis usw. Die Beziehungen und Verwindungen zwischen all diesen Gebieten sind vielfältig und schwer schematisch zu skizzieren. Aber Konsens besteht, dass Lineare Algebra zur unverzichtbaren Basis gehört. Sie ist entstanden aus der Aufgabe, lineare Gleichungssysteme zu lösen und solche Aufgaben treten in allen Gebieten der Mathematik und ihren Anwendungen immer wieder auf. Wie schon in der Einleitung erwähnt wurde, hat es lange gedauert, bis die Lineare Algebra als eigenständiges Gebiet in die Lehrpläne aufgenommen wurde. Lange Zeit wurde sie vorwiegend als technisches Hilfsmittel der Geometrie angesehen, zur Beschreibung von linearen Gebilden wie Geraden und Ebenen, sowie Kegelschnitten. Eine der ersten zusammenfassenden aber wenig beachteten Darstellungen war die 1844 in Leipzig erschienene „*Ausdehnungslehre*" von H. GRASSMANN. Erst in der Göttinger Schule wurden die abstrakten Hintergründe konsequent herausgearbeitet, und Vektorräume als die wesentlichen Objekte der Untersuchung eingeführt. Neben dem Buch von SCHREIER und SPERNER [S-S] ist hierzu auch die 1931 erstmals erschienene „*Moderne Algebra*" von B. L. VAN DER WAERDEN hervorzuheben. Bis in die 50er Jahre des vorigen Jahrhunderts hatten die entsprechenden Anfängervorlesungen meist noch den Titel „*Analytische Geometrie*", erst danach wurde die Geometrie als eine von mehreren möglichen Anwendungen in den Hintergrund gedrängt. Sorgfältige historische Hinweise zu dieser langen Entwicklung findet man bei BRIESKORN [B].

Seither wird in der Ausbildung in Linearer Algebra neben der Beschäftigung mit linearen Gleichungssystemen auch der Umgang mit abstrakten mathematischen Strukturen, wie Gruppen, Ringen, Körpern, Vektorräumen usw. geübt. Dabei muss man zunächst die mathematische Sprache lernen, d.h. präzise Formulierungen finden, mit denen Strukturen definiert sind, sowie korrekte Behauptungen darüber aufstellen, und stichhaltige Begründungen dafür erarbeiten. Die Anschauung kann dabei helfen, Beweise zu finden; aber dann beginnt die Knochenarbeit, sie präzise aufzuschreiben. Das ist erfahrungsgemäß die größte Hürde für Studienanfänger.

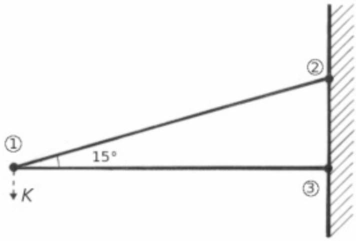
Anwendungen der Linearen Algebra

Man sollte sich nicht der Illusion hingeben, dass ein einzelnes mathematisches Teilgebiet, wie die Lineare Algebra, die Hilfsmittel zur Lösung großer praktischer Probleme liefern könnte. Wenn Mathematik in die Praxis geht, dann gehen da immer verschiedene mathematische Teilgebiete gemeinsam. Aber trotzdem: Es gibt sehr markante Beispiele für Anwendungen der Linearen Algebra - ein paar wollen wir im Folgenden beschreiben.

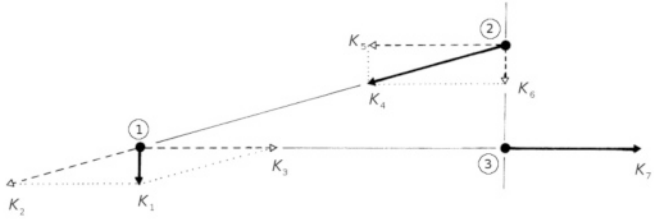
1 Statik von Gerüsten. Das Problem, Bauwerke und andere Konstruktionen auszuführen, die stabil sind, ist alt und bei weitem nicht trivial. Betrachten wir etwa ein ***Gerüst***, d.h. ein Gebilde, das aus Streben und Knoten besteht (in der Baustatik spricht man von einem ***Fachwerk***). Soll es stabil gebaut werden, so muss man wissen, welche Kräfte auf die Bauteile wirken. Grundlegende Untersuchungen dazu hat u.a. J. C. MAXWELL (1831 - 1879) geleistet, den man vor allem wegen seiner Beiträge zur Elektrodynamik kennt; dann aber auch C. CULMANN, von dem 1866 das Buch „*Die Graphische Statik*" erschien. Die Methode benutzt Lineare Algebra, sein Schüler M. KOECHLIN hat als Ingenieur die Statik des Eiffel-Turms gerechnet, der seit der Weltausstellung 1889 noch heute steht.

Wir wollen die Methode in ihrer graphischen und ihrer rechnerischen Form an einem ganz einfachen, aber doch charakteristischen Beispiel illustrieren.

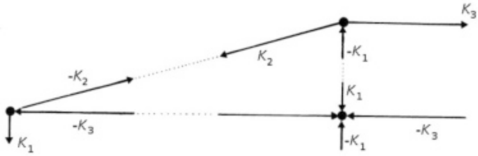
Zur Vereinfachung betrachten wir ein ebenes Problem, nämlich die Aufhängung eines Gewichtes (etwa einer Lampe) an einer Mauer mit Hilfe eines Gestänges in Form eines rechtwinkligen Dreiecks. Die Stangen und ihre Befestigungen müssen so ausgelegt sein, dass sie den entstehenden Zug- und Druckkräften standhalten. Zunächst wirkt im Punkt ① eine Kraft K senkrecht nach unten, sie soll groß sein im Vergleich zum Gewicht der Stangen.



Kräfte addieren sich wie Vektoren, im Punkt ① ist $K = K_1$ Summe von K_2 und K_3; K_2 verursacht einen Zug in Richtung ②, K_3 einen Druck in Richtung ③. Graphisch kann man K_2 und K_3 durch eine Parallelogrammkonstruktion ermitteln.



Im Punkt ② zerfällt die Zugkraft $K_4 = K_2$ in $K_5 = -K_3$ und $K_6 = K_1$, im Punkt ③ ist die Druckkraft $K_7 = K_3$. Der gesamte Fluss von Kräften und Gegenkräften sieht dann so aus:



Gleichgewicht bedeutet, dass in jedem Befestigungspunkt die Summe aller angreifenden Kräfte verschwindet; rechnerisch ergibt sich daraus ein System von linearen Gleichungen. Dazu beschreibt man jede der beteiligten Kräfte K_i als Vektor

$$K_i = (x_i, y_i, z_i)$$

mit reellen Komponenten x_i, y_i, z_i. Im obigen ebenen Beispiel sind die $z_i = 0$, das Gleichgewicht im Punkt ① ergibt folgende Bedingungen: K_1 ist vorgegeben, etwa $K_1 = (0, -1)$, das bedeutet

$$x_1 = 0 \quad \text{und} \quad y_1 = -1 \, .$$

Aus der Geometrie des Dreiecks und $\tan(15°) \approx 0.268$ folgt

$$0.268 x_3 + y_2 = 0 \quad \text{und} \quad y_3 = 0$$

Schließlich ergibt die Gleichgewichtsbedingung $K_1 - K_2 - K_3 = 0$, dass

$$x_1 - x_2 - x_3 = 0 \quad \text{und} \quad y_1 - y_2 - y_3 = 0 \, .$$

Das sind 6 lineare Gleichungen für die 6 Komponenten der drei Kräfte, die Lösung ist

$$K_1 = (0, -1),\, K_2 = (-3.732, -1),\, K_3 = (3.732{,}0)\ .$$

Daraus ergeben sich einfach die Kräfte in den Punkten ② und ③. Wie man sieht, ist die Zugkraft auf die Befestigung im Punkt ② fast viermal so groß wie das angehängte Gewicht.

In komplizierteren Fällen sind die Gleichungssysteme zu den einzelnen Punkten stärker gekoppelt, man kann sie dann nur gemeinsam lösen. Hat man n Punkte und in jedem Punkt drei räumliche Kräfte, so ergibt das insgesamt $9n$ zu bestimmende Koordinaten. Wie groß n sein kann, sieht man nicht nur am Eiffel-Turm, sondern schon an jedem Baukran.

Neben den statischen Kräften gibt es aber auch dynamische Effekte, da durch elastische Verformungen Schwingungen ausgelöst werden können. So wird berichtet, dass im Jahr 1850 eine Brücke über den Fluss Maine bei Angers einstürzte, während Soldaten im Gleichschritt darüber marschierten. Seither ist dem Militär verboten, Brücken auf diese Art zu überqueren.

Ein aktuelleres Beispiel ist die von Sir Norman Foster und Partnern entworfene ***Millenium Bridge*** über die Themse in London, eine Fußgängerbrücke, die St. Paul's Cathedral mit der Tate Modern Gallery verbindet. Sie ist konzipiert als „blade of light", die Tragseile zwischen den 144 m entfernten Pylonen haben einen Durchhang von nur 2.3 m; das Ingenieurbüro ARUP berechnete die diffizile Statik. Nach der Einweihung durch Königin Elisabeth II wurde die Brücke am 10. Juni 2000 eröffnet - am 12. Juni 2000 musste sie wieder geschlossen werden, da sie bedrohlich zu wackeln anfing; seither heißt sie „the wobbly bridge".

Nach vielen Experimenten und Rechnungen von ARUP wurde die Ursache gefunden: Die Statik war in Ordnung, aber es entstanden seitliche Schwingungen, die durch die Reaktionen der Fußgänger noch verstärkt wurden: Durch Resonanz schaukelten sich die Schwingungen gefährlich auf. Einzelheiten dazu findet man unter [ARUP]. Der Umbau und Einbau von Schwingungsdämpfern kostete 5 Millionen Pfund. Im Februar 2002 wurde das Ergebnis mit bis zu 20 000 Freiwilligen getestet und für gut befunden. Seither ist die Brücke wieder geöffnet.

Was hat das mit Linearer Algebra zu tun? Schwingungen und ihre Dämpfung hängen mit Matrizen und ihren Eigenwerten zusammen.

2 Linearisierung. In der Praxis gibt es kaum eine strikt lineare Beziehung zwischen zwei Größen; selbst für Preise wird bei Abnahme größerer Mengen ein Nachlass gewährt. Aber die Tangente an eine Funktion gibt in einem begrenzten Bereich wenigstens eine brauchbare Näherung. Dieses Prinzip der Analysis heißt ***lineare Approximation***, hier helfen die Methoden der Linearen Algebra. Man kann es ausbauen und eine gegebene oder gesuchte differenzierbare Funktion in ihrem gesamten Definitionsbereich durch eine ***stückweise lineare*** Funktion approximieren, etwa bei der Lösung von Differentialgleichungen durch ***Diskretisierung*** und ***stückweise Linearisierung***.

Als einfaches Beispiel sei die Berechnung einer Wärmeverteilung in der Ebene angegeben. Bezeichnet $f(x,y)$ die Temperatur im Punkt (x,y), so erfüllt die Funktion f bei Temperaturgleichgewicht die partielle Differentialgleichung zweiten Grades

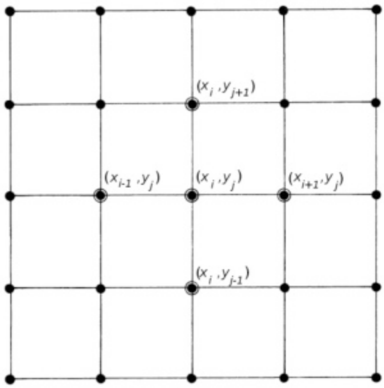
$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) f(x,y) = 0 \ ,$$

man nennt sie ***Laplace-Gleichung***, die Lösungen heißen ***harmonisch***. Wir nehmen an, dass die Temperaturverteilung am Rand eines Quadrats vorgegeben ist und unverändert bleibt. Eine übliche Grundlage für die approximative numerische Berechnung der Lösung f ist eine Diskretisierung: Man überzieht den quadratischen Bereich mit einem genügend feinen quadratischen Gitter von Messpunkten (x_i,y_j). Ersetzt man in der Laplace-Gleichung Differentialquotienten durch Differenzenquotienten und schafft man die Nenner weg, so ergibt sich an der Stelle (x_i,y_j) die Bedingung

$$(f(x_{i+1},y_j) - f(x_i,y_j)) - (f(x_i,y_j) - f(x_{i-1},y_j))$$
$$+(f(x_i,y_{j+1}) - f(x_i,y_j)) - (f(x_i,y_j) - f(x_i,y_{j-1})) = 0\ ,$$

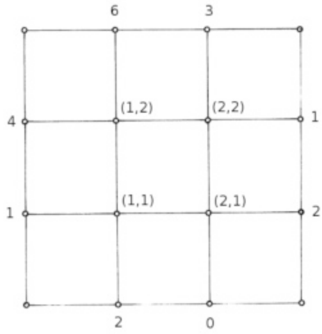
das ist gleichbedeutend mit

$$f(x_i,y_j) = \tfrac{1}{4}(f(x_{i+1},y_j) + f(x_{i-1},y_j) + f(x_i,y_{j+1}) + f(x_i,y_{j-1}))\ . \qquad (*)$$



Physikalisch bedeutet diese Bedingung, dass die Temperatur an jeder Stelle (x_i,y_j) im Inneren gleich dem Mittelwert der Temperaturen an den vier nächstgelegenen Gitterpunkten ist. Insgesamt erhält man mit Hilfe von $(*)$ für die Temperaturen $f(x_i,y_j)$ so viele lineare Gleichungen, wie man Gitterpunkte hat; dieses Gleichungssystem ist zu lösen.

Als Beispiel wählen wir ein relativ grobmaschiges Gitter, mit folgenden Werten von f auf den relevanten Gitterpunkten am Rand:



Für die vier gesuchten Werte

$$f_{ij} := f(x_i,y_j) \quad \text{mit} \quad 1 \leq i,j \leq 2$$

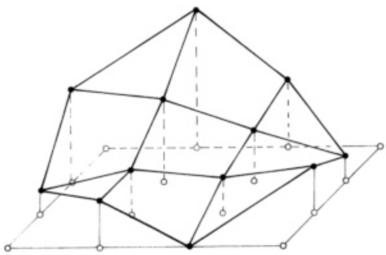
erhält man daraus die linearen Gleichungen

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
4f_{11} & - & f_{12} & - & f_{21} & & & = & 3 \\
-f_{11} & + & 4f_{12} & & & - & f_{22} & = & 10 \\
-f_{11} & & & + & 4f_{21} & - & f_{22} & = & 2 \\
& - & f_{12} & - & f_{21} & + & 4f_{22} & = & 4
\end{array}$$

mit den Lösungen

$$f_{11} = \tfrac{49}{24} \approx 2.042\,,\; f_{12} = \tfrac{43}{12} \approx 3.583\,,\; f_{21} = \tfrac{19}{12} \approx 1.583\,,\; f_{22} = \tfrac{55}{24} \approx 2.292\;.$$

Das entstehende stückweise lineare „harmonische" Funktionsgebirge sieht so aus:



3 Der Page Rank bei Google. Ein aktuelleres Beispiel für eine Anwendung der Linearen Algebra ist die Internet-Suchmaschine Google, die in ihrer ursprünglichen Form in den 90er Jahren von den beiden Studenten S. BRIN und L. PAGE entwickelt und 2001 patentiert wurde. Wichtiger Bestandteil ist eine Methode für die Anordnung der Suchergebnisse im Browser, Grundlage dafür ist der „PageRank" $p(S)$ für jede Web-Site S. Er ist ein Maß dafür, wie stark die Seite mit anderen vernetzt ist, sagt allerdings nichts über die Qualität des Inhalts der Seite aus. Die Definition des PageRank kann wie folgt motiviert werden.

Man stellt sich einen Surfer vor, der einen Weg auf den vorhandenen Seiten $S_1, \ldots, S_N$ des Internets zurücklegt. Er beginnt auf einer zufällig ausgewählten Seite und folgt in der Regel einem der angegebenen Links. Da er aber entmutigt werden kann (etwa weil die Links nicht mehr weiterhelfen), darf er gelegentlich auch einmal auf eine beliebige andere Seite springen. Um das zu präzisieren wird zunächst ein ***Damping Faktor*** d mit $0 \leq d \leq 1$ festgesetzt (meist wird $d = 0.85$ gewählt). Er hat folgenden Einfluss: Auf irgendeiner Seite angekommen folgt der Surfer mit der Wahrscheinlichkeit d einem zufällig ausgewählten Link, mit der Wahrscheinlichkeit $1 - d$ springt er vom Zufall gesteuert auf eine beliebige andere Seite des Netzes. Der ***PageRank*** $p(S)$ ist nun erklärt als die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich der Surfer auf einem sehr langen Weg zu einem zufällig gewählten Zeitpunkt auf der Seite S befindet. Da N sehr groß ist, wird $p(S)$ eine sehr kleine Zahl sein, auf jeden Fall gilt

$$0 \leq p(S) \leq 1 \;.$$

Nach den elementaren Regeln für eine Wahrscheinlichkeitsverteilung ist

$$p(S_1) + \ldots + p(S_N) = 1 \;.$$

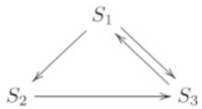
Die Wahrscheinlichkeitsrechnung ergibt nun eine Beziehung zwischen den verschiedenen PageRanks. Dazu betrachtet man für eine Seite S alle Seiten, die einen Link auf S enthalten, wir bezeichnen sie mit $T_1, \ldots, T_n$, wobei $0 \leq n \leq N-1$. Bezeichnet c_i die Anzahl der Links, die von T_i ausgehen, so gilt

$$p(S) = d \cdot \Big(\frac{p(T_1)}{c_1} + \ldots + \frac{p(T_n)}{c_n}\Big) + \frac{1-d}{N} \;.$$

Damit könnte man $p(S)$ nur ausrechnen, wenn die Werte $p(T_i)$ schon bekannt wären. Aber immerhin erhält man auf diese Weise ein System von N linearen Gleichungen für die N gesuchten Zahlen $p(S_1), \ldots, p(S_N)$.

Nach der Theorie kann man ein solches Gleichungssystem lösen, aber in der Praxis benötigt man bei großem N sehr gute und schnelle numerische Verfahren. In der Gründerzeit des Internets rechnete man noch mit etwa 20 Millionen Seiten, inzwischen ist die Gesamtzahl N unüberschaubar geworden. Daher kann der PageRank nur noch für ausgewählte Seiten berechnet werden. Mehr dazu findet man bei [LM].

Um das Prinzip erläutern zu können, geben wir ein ganz einfaches Beispiel mit $N = 3$, das schematisch so aussieht:



Wie man daran erkennt, ist

$$c_1 = 2 \quad \text{und} \quad c_2 = c_3 = 1 \; .$$

Also lauten die drei Gleichungen für $p_i = p(S_i)$ mit $b := \frac{1}{3}(1-d)$:

$$\begin{array}{rcrcrcl} p_1 & & & - & dp_3 & = & b \\ -\frac{d}{2}p_1 & + & p_2 & & & = & b \\ -\frac{d}{2}p_1 & - & dp_2 & + & p_3 & = & b \end{array}$$

Für $d = 0.85$ erhält man die Lösungen

$$p_1 \approx 0.388 \; , \quad p_2 \approx 0.215 \; , \quad p_3 \approx 0.397 \; .$$

Da S_2 weniger verlinkt ist, als S_1 und S_3 ist p_2 nur etwa halb so groß wie p_1 und p_3. Bei kleinerem d haben die Links weniger Einfluss. Etwa für $d = 0.1$ wird

$$p_1 \approx 0.335 \; , \; p_2 \approx 0.317 \; , \; p_3 \approx 0.348 \; ,$$

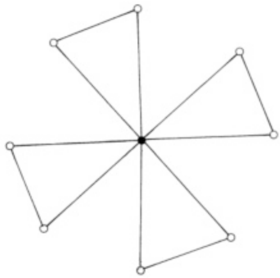
da sind die PageRanks schon beinahe gleichverteilt.

Eine Variante des Gleichungssystems erhält man mit Hilfe der ***Linking Matrix*** A. Bezeichnet c_i für $1 \leq i \leq N$ die Anzahl der Links, die von der Seite S_i ausgehen, so hat A für $1 \leq i, j \leq N$ die Einträge

$$a_{ij} := \begin{cases} \dfrac{d}{c_i} \, , & \text{falls } \; i \neq j \; \text{ und } \; S_i \; \text{ einen Link auf } \; S_j \; \text{ enthält;} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Im Extremfall $d = 1$ ist dann $(p(S_1), \ldots, p(S_N))$ ein Eigenvektor der Matrix A zum Eigenwert 1. Zur Lösung solcher Probleme gibt es auch schnelle numerische Verfahren.

4 Der Satz vom Politiker. Eine ganz andersartige Fragestellung betrifft ***Graphen***, das sind Konfigurationen, die aus Punkten und Verbindungsgeraden (oder ***Ecken*** und ***Kanten***) bestehen. Ein Beispiel ist der ***Windmühlengraph***.



Er hat eine zentrale Ecke und eine gerade Zahl von Ecken am Rand, kann also für jede ungerade Zahl von Ecken konstruiert werden. Interpretiert man die Punkte als Personen und die Kanten als gegenseitige Freundschaften, so stehen am Rand befreundete Paare, und jeder ist mit der Person in der Mitte befreundet. Eine solche Person, die mit jedem befreundet ist, wird als ***Politiker*** bezeichnet, seine ,,Freundschaften" sind berufsspezifisch. In dieser Interpretation hat der Windmühlengraph dann folgende Eigenschaft:

Je zwei beliebige Personen haben immer
genau einen gemeinsamen Freund $\qquad (*)$

Der ***Satz vom Politiker*** sagt nun aus, dass Bedingung $(*)$ für n Personen nur dann erfüllt sein kann, wenn n ungerade ist und es einen Politiker gibt. Außerdem muss der entsprechende Graph ein Windmühlengraph sein.

Für diesen Satz ist gibt es elementare Beweise. Aber der klarste und überzeugendste wurde von P. Erdös, A. Renyi und V. Sós mit Hilfe von Linearer Algebra,genauer Eigenwerten symmetrischer Matrizen gegeben; das findet man bei [A-Z, Kap. 34]. Der Schlüssel dazu ist die ***Adjazenzmatrix*** A des Graphen: Sind die Personen mit $1, \ldots, n$ nummeriert, so sind die Einträge von A gegeben durch

$$a_{ij} := \begin{cases} 1\,, & \text{wenn } i \neq j \text{ und } i \text{ mit } j \text{ befreundet,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Fazit

Unsere kleine Liste von Beispielen für Fragen, hinter denen Lineare Algebra steckt, könnte man beliebig erweitern. Etwa in [A-B] kann man nachlesen, was in einer CD versteckt ist, in [A-Z, Kap. 15] findet man Ergebnisse zur berühmten ***Borsuk-Vermutung*** über die Zerlegung von Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ mit beschränktem Durchmesser. Viele weitere Anwendungen findet man bei G. STRANG [St_1] und [St_2].

Um eine mathematische Theorie sachgemäß anwenden zu können, muss man sie zunächst sorgfältig studieren und genügend verstehen; das gilt auch für die Lineare Algebra. Daneben kann die Mathematik durch ihren klaren Aufbau und die Schönheit ihrer Strukturen begeistern; das zeigt sich zu Beginn des Studiums besonders in der Linearen Algebra, für die der Leser nun hoffentlich nachhaltig motiviert ist.

Literatur zur Einführung

[A-B] Aigner, M. und E. Behrends (Hrsg.): *Alles Mathematik*. Vieweg 2008[3]

[A-Z] Aigner, M. und G. M. Ziegler: *Das BUCH der Beweise*. Springer 2004[2]

[ARUP] www.arup.com/MilleniumBridge/

[B] Brieskorn, E.: *Lineare Algebra und Analytische Geometrie (mit historischen Anmerkungen von E. Scholz)*. Vieweg 1983

[LM] Langville, A. N. and C. D. Meyer: *Google's PageRank and Beyond, The Science of Search Engine Rankings*. Princeton 2006

[S-S] Schreier, O. und E. Sperner: *Einführung in die Analytische Geometrie und Algebra*. Teubner 1931

[St_1] Strang, G.: *Linear Algebra and its Applications*. WB Saunders 2005[4]

[St_2] Strang, G.: *Linear Algebra: A Happy Chance to Apply Mathematics*. Proc. Int. Congress on Math. Education (ICME - 10). Denmark 2004