Prof. Hansjörg Geiges
Dr. Tilman Becker

Lineare Algebra I

Übungsblatt 13

Präsenzaufgabe 1. In der Vorlesung zeigen wir, daß sich jede symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mittels einer (sogar speziell-)orthogonalen Transformation diagonalisieren läßt, d.h. es existiert eine Matrix $T \in \mathrm{SO}(n)$, so daß TAT^{-1} eine Diagonalmatrix ist.

Zeigen Sie die Umkehrung: Ist $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Matrix, die sich auf diese Weise diagonalisieren läßt, so ist A symmetrisch.

Präsenzaufgabe 2. Wir betrachten die Matrix

$$A := \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 10 & 5 & 10 \\ 5 & -14 & 2 \\ 10 & 2 & -11 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

(a) Zeigen Sie, daß $A \in \mathrm{SO}(3)$.

(b) Berechnen Sie das charakteristische Polynom χ_A.

(c) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A und geben Sie Orthonormalbasen der Eigenräume an. Zeigen Sie damit, daß A eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren besitzt.

(d) Geben Sie eine Matrix $T \in \mathrm{SO}(3)$ an, so daß TAT^{-1} eine Diagonalmatrix ist.

Hausaufgabe 1. Seien $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ kommutierende Matrizen, d.h. $AB = BA$. Zeigen Sie:

(a) Ist $E_\lambda \subset \mathbb{C}^n$ der Eigenraum von A zum Eigenwert λ, so gilt $B(E_\lambda) \subset E_\lambda$.

(b) Es gibt einen Vektor im $\mathbb{C}^n$, der zugleich Eigenvektor von A und von B ist.

Hausaufgabe 2. (a) Geben Sie ein Beispiel zweier Matrizen $A, B \in \mathbb{F}_2^{2\times 2}$ an mit der Eigenschaft, daß

$$AB - BA = E.$$

(b) Zeigen Sie, daß es keine Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ geben kann, die dieser Gleichung genügen.

Bonusaufgabe 1. Zeigen Sie, daß jede Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ einen Eigenwert besitzt, *ohne* das charakteristische Polynom zu verwenden. Damit haben wir einen determinantenfreien Beweis der Existenz von Eigenwerten.

Sei dazu $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, und benutzen Sie die Tatsache, daß die $n+1$ Vektoren

$$v, Av, \ldots, A^n v$$

linear abhängig sein müssen.

b.w.

Bonusaufgabe 2. In dieser Aufgabe wollen wir ohne den Umweg über die komplexen Zahlen zeigen, daß jeder selbstadjungierte Endomorphismus eines endlich-dimensionalen euklidischen Vektorraumes einen Eigenvektor besitzt.

Dazu genügt es wie in der Vorlesung, symmetrische Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und die dadurch definierte Abbildung $A \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ zu betrachten, wobei der $\mathbb{R}^n$ mit dem Standard-Skalarprodukt versehen ist.

Die Abbildung $h \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$h(v) = \langle v, Av \rangle,$$

ist stetig, und nimmt daher auf der kompakten Menge

$$S^{n-1} := \{v \in \mathbb{R}^n \colon\ |v| = 1\}$$

(der sogenannten $(n-1)$-Sphäre) ein Maximum an, wie Sie in der Analysis gelernt haben oder noch lernen werden, d.h. es gibt ein $v_0 \in S^{n-1}$ mit $\langle v_0, Av_0 \rangle \geq \langle v, Av \rangle$ für alle $v \in S^{n-1}$.

Zeigen Sie, daß v_0 Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_0 := \langle v_0, Av_0 \rangle$ ist, und daß λ_0 der größte Eigenwert von A ist.

Hinweis: Wählen Sie $w \in S^{n-1}$ orthogonal zu v_0, und überlegen Sie sich die folgenden Schritte:

(i) Für alle $t \in [0, 1]$ und $s := \sqrt{1 - t^2}$ gilt

$$x := sv_0 + tw \in S^{n-1}.$$

(ii) $\langle v_0, Av_0 \rangle \geq s^2 \langle v_0, Av_0 \rangle + 2st \langle w, Av_0 \rangle + t^2 \langle w, Aw \rangle$.

(iii) Av_0 ist orthogonal zu w.

Abgabe der Hausaufgaben: Mittwoch 24.1.
bis spätestens 18 Uhr in den Briefkästen
im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock).