SS 2008

Prof. Hansjörg Geiges
Dipl.-Math. Bijan Sahamie

Mathematik für Physiker II

Übungsblatt 2

Aufgabe 1. Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} xy \cdot \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Zeigen Sie, daß f überall zweimal partiell differenzierbar ist und berechnen Sie explizit die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(0,0) \text{ und } \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(0,0).$$

Gilt $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$? Ist f im Nullpunkt stetig?

Aufgabe 2. Aus einem Potential $V(x,y,z)$ erhält man das Kraftfeld $F(x,y,z)$ als

$$F = -\operatorname{grad} V.$$

Die Potentialfunktion einer Kugel vom Radius R

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 \ : \ r := \sqrt{x^2+y^2+z^2} \in \mathbb{R}\}$$

ist definiert durch

$$V(r) = \begin{cases} -2\pi R^2 + \dfrac{2\pi}{3} r^2 & \text{für} \quad r < R \\ \dfrac{-4\pi R^3}{3r} & \text{für} \quad r \geq R \end{cases}$$

Berechnen Sie das Kraftfeld F und dessen Divergenz für $0 \leq r < R$ und $r > R$.

b.w.

Aufgabe 3. Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Weiter seien $a,\ b \in$ D derart, daß das gesamte Segment

$$[a,b] := \{a + t(b-a)\colon\ t \in [0,1]\}$$

in D liegt. Zeigen Sie den folgenden **Mittelwertsatz** (vergl. I.6.10): Es gibt ein $c \in [a,b] \backslash \{a,b\}$ mit

$$f(b) - f(a) = \langle \mathrm{grad} f(c), b-a \rangle\,.$$

(**Hinweis:** Wenden Sie die Kettenregel und den Mittelwertsatz der 1-dimensionalen Differentialrechnung auf die Funktion $\phi(t) = f(a + t(b-a))$ an.)

Aufgabe 4. Seien $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ und $\gamma\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ differenzierbare Abbildungen. Zeigen Sie die Kettenregel für $f \circ \gamma\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, d.h.

$$\frac{d(f \circ \gamma)}{dt}(t_0) = \langle \mathrm{grad} f(\gamma(t_0)), \dot{\gamma}(t_0) \rangle\,.$$

(**Hinweis:** Schreiben Sie den Restterm $\varphi(h)$ in der Darstellung von f als differenzierbare Abbildung im Punkt $\gamma(t_0)$ in der Form $\varphi(h) = \varphi_0(h) \cdot ||h||$ mit $\varphi_0(h) \longrightarrow 0$ für $h \longrightarrow 0$.)

Abgabe: Freitag 18.04.08 bis 10 Uhr
in den entsprechend beschrifteten Briefkasten
im Keller des Mathematischen Instituts
(gegenüber der Fachschaft).