SS 2008

Prof. Hansjörg Geiges
Dipl.-Math. Bijan Sahamie

Mathematik für Physiker II

Übungsblatt 5

Aufgabe 1. Für die lineare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x+2y+4z \\ x-5y+3z \end{pmatrix}$$

bestimme man die Matrix A bezüglich der Basen

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ des } \mathbb{R}^3 \text{ und } \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ des } \mathbb{R}^2.$$

Aufgabe 2.

(a) Zeigen Sie durch Betrachtung des charakteristischen Polynoms, daß eine reelle symmetrische 2×2 Matrix

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

nur reelle Eigenwerte hat.

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenräume der folgende Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3. Sei $A := (a_{ij}) \in K^{n\times n}$ mit $n=2$ oder $n=3$. Schreiben Sie $\chi_A(f)$ explizit als Polynom $t^2+b_1t+b_0$ bzw. $t^3+b_2t^2+b_1t+b_0$, mit den b_k gegeben durch algebraische Ausdrücke in den (a_{ij}). Zeigen Sie, daß

$$A^2+b_1A+b_0E=0 \text{ für } n=2$$

bzw.

$$A^3+b_2A^2+b_1A+b_0E=0 \text{ für } n=3.$$

Dies sind Spezialfälle des Satzes von **Cayley-Hamilton**.

b.w.

Aufgabe 4. Zeigen Sie (ohne Berechnung einer Determinante!), daß die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 6 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 6 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 6 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 6 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 6 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

das charakteristische Polynom $\chi_A(t) = t(t-7)^6$ hat.

Bonusaufgabe. Bestimmen Sie alle Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, die sowohl eine Dreiecksmatrix als auch eine orthogonale Matrix sind.

Abgabe: Freitag 09.05.08 bis 10 Uhr
in den entsprechend beschrifteten Briefkasten
im Keller des Mathematischen Instituts
(gegenüber der Fachschaft).